

1] Уравнение $5^{(-2^x)} = 2$ корней не имеет, т.к. при $t < 0$ $5^t < 1$. Ответ №5.

$$2] \sin 4x + 1 = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x + 1 = 1 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \text{ Ответ №2.}$$

3] Пусть до кризиса общие расходы составляли x , в том числе $0,3x$ — на з/м, $0,7x$ — остальные расходы. Во время кризиса фонд з/м стал равен $100\% - \frac{620}{9}\% = \frac{280}{9}\%$ от $0,3x$, т.е. $\frac{0,3x}{100} \cdot \frac{280}{9} = \frac{7x}{75}$, а общие расходы $\frac{7x}{75} + 0,7x = \frac{119x}{150}$. Осталось выяснить, сколько процентов составляет $\frac{7x}{75}$ от $\frac{119x}{150}$. Ответ №2.

$$4] \text{ ОДЗ: } x \in [-2\pi; \pi]; \sqrt{(x+2\pi)(\pi-x)} > |x+7| + |x-4| - 11 + \pi\sqrt{2}.$$

$$\text{С учетом ОДЗ: } \sqrt{(x+2\pi)(\pi-x)} > x+7 + 4-x - 11 + \pi\sqrt{2}$$

$$\sqrt{-x^2 - \pi x + 2\pi^2} > \pi\sqrt{2}$$

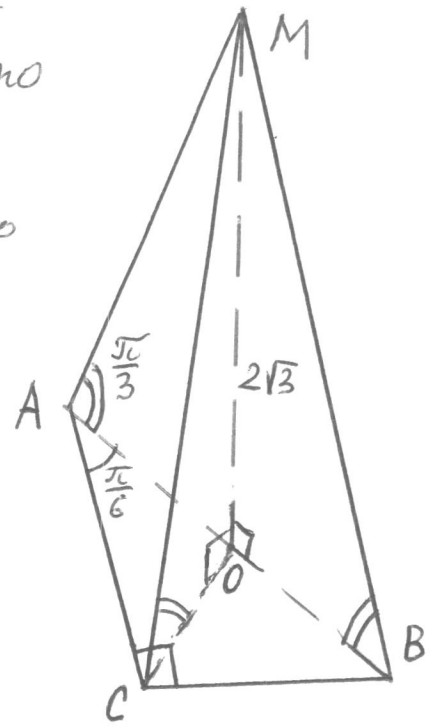
$$-x^2 - \pi x + 2\pi^2 > 2\pi^2$$

$$x(x+\pi) < 0, \quad x \in (-\pi; 0).$$

Сумма целых решений равна $-3-2-1$, т.е. -6 .

Ответ №4.

5] П.к все боковые рёбра наклонены к основанию под одинаковым углом, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания пирамиды, т.е. середину гипотенузы (см. рис).



Из $\triangle AOM$: $AO=2$. Тогда $AB=4$, $AC=2\sqrt{3}$.

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \right) \cdot 2\sqrt{3} = 4. \quad \text{Ответ } \checkmark 4.$$

6] $\rho(a; b) = |a - b| = \sqrt{(a - b)^2} = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} = \sqrt{2018 - 4ab} = 40$, поэтому $2018 - 4ab = 1600$. Ответ $\checkmark 4$.

7] П.к $\operatorname{ctg} \frac{\pi - 4\pi n}{4} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \pi n \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, то

$a_n = \frac{n-4}{2n+3}$. Решая неравенство $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < 0,01$, т.е.

$$\left| \frac{n-4}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}, \text{ получим } \frac{11}{2(2n+3)} < \frac{1}{100}, \text{ т.е.}$$

$n \geq 274$ (с учетом того, что $n \in \mathbb{N}$)

Ответ $\checkmark 2$.

8] Обозначим данное выражение за x . Заметим, что

$$x < 0 \text{ и получаем } x^2 = 21 - 2\sqrt{10,5^2 - 106,25} =$$

$$= 21 - 2\sqrt{4} = 17. \text{ Так } x^2 = 17 \text{ и } x < 0, \text{ то } x = -\sqrt{17}.$$

Ответ №3.

9] Пусть $t = x - 1$, тогда $dt = dx$; $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2 =$
 $= 1 - t^2$ и данный интеграл
$$I = \int_{-1}^1 \left(1 + |t| - \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - t^2}\right) dt.$$

Так как подынтегральная функция четная, а отрезок интегрирования симметричен относительно 0, то

$$I = 2 \cdot \int_0^1 \left(1 + |t| - \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - t^2}\right) dt = 2 \cdot \left(\int_0^1 (1 + t) dt - \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt \right).$$

$$\int_0^1 (1 + t) dt = \left(t + \frac{t^2}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}, \text{ а } \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt \text{ численно равен}$$

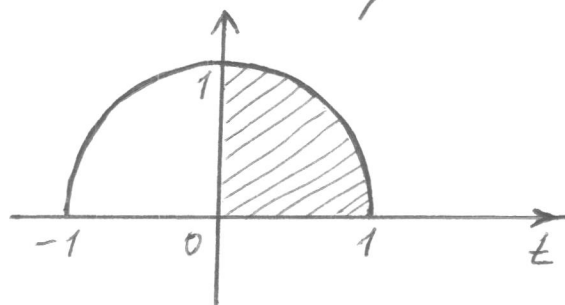
площади четверти круга

(см рис.) радиуса 1, т. е.

$$\frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Учтя, } I = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 2.$$

Ответ №4.



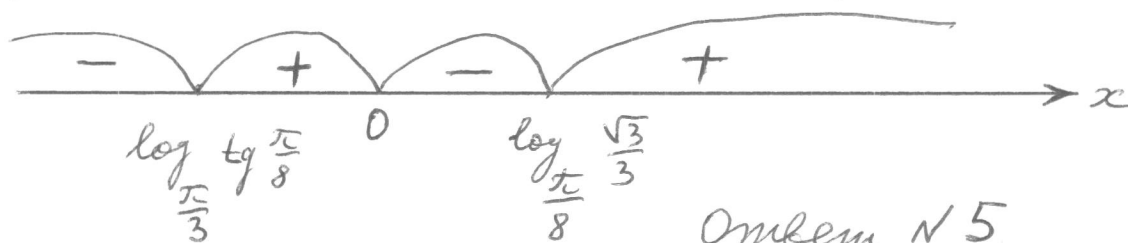
$$\boxed{10} \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - \frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

П.к. $\operatorname{ctg} x \in [\frac{1}{2}; 3]$, то $\frac{5}{4} \leq 1 + \operatorname{ctg}^2 x \leq 10$;

$$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \leq \frac{4}{5}; \quad -\frac{8}{5} \leq \frac{-2}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \leq -\frac{1}{5};$$

$$-\frac{3}{5} \leq \cos 2x \leq \frac{4}{5}. \quad \text{Ответ } \text{N} 1.$$

$$\boxed{11} \quad \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}. \quad \text{Метод интервалов:}$$



$\boxed{12}$ Пусть x — цена производителя. Гипермаркет сначала продавал деликатесы по цене $1,8x$, а оставшиеся 60% товара — по цене $0,9x$.

Всего гипермаркет выручил

$$0,4 \cdot 1,8x + 0,6 \cdot 0,9x, \text{ т.е. } 1,26x.$$

Прибыль составила 26% (от цены производителя). Ответ N 1.

13

$$(x-a) \cdot \lg(5x-x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=0 \\ 5x-x^2-3 > 0 \\ 5x-x^2-3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ x^2-5x+3 < 0 \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

П.к $x=1$ и $x=4$ — два разных корня исходного уравнения (не зависимо

от a), то система $\begin{cases} x=a \\ x^2-5x+3 < 0 \end{cases}$ либо не имеет

решений, либо имеет реш, но только 2 или 3.

В первом случае $a^2-5a+3 \geq 0$, т.е.

$$a \in (-\infty; \frac{5-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{13}}{2}; +\infty),$$

Во втором случае $a=2, a=3$.

Итак, два разных корня исходное уравнение имеет при

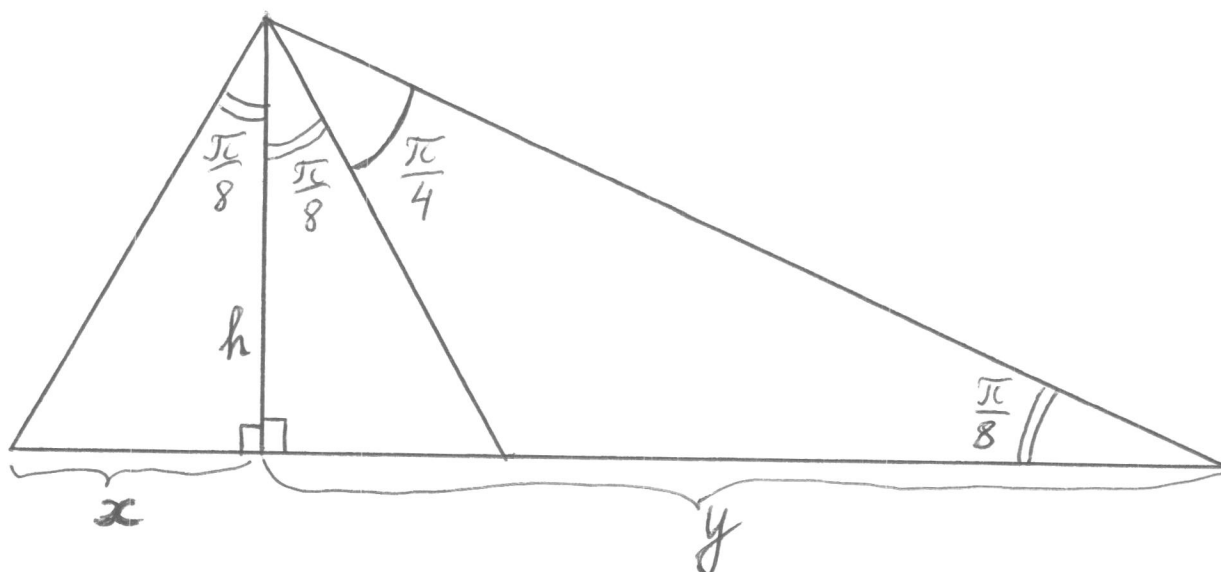
$$a \in (-\infty; \frac{5-\sqrt{13}}{2}] \cup \{2; 3\} \cup [\frac{5+\sqrt{13}}{2}; +\infty).$$

Из этого множества выбираем целые числа

$a \in (-4; 6)$, это будут $-3; -2; -1; 0; 2; 3; 5$,

их сумма равна 4. Ответ №4.

14



$$x + y = 4 \cdot \sqrt[4]{2}; \quad h \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + h \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = 4 \cdot \sqrt[4]{2}$$

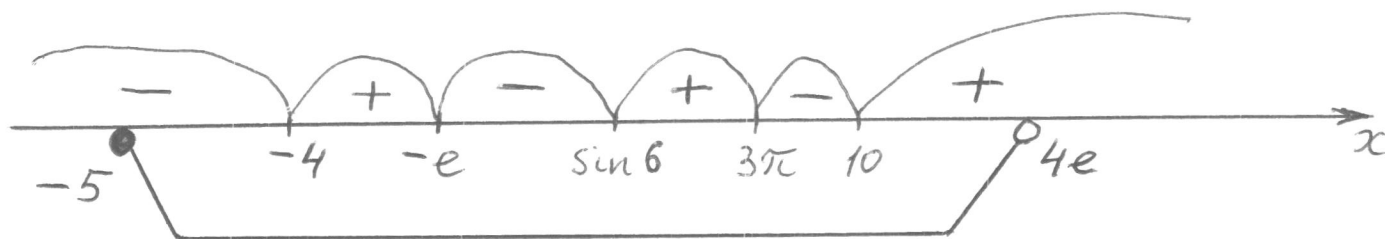
$$h \cdot (\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}) = 4 \cdot \sqrt[4]{2}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} + \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}.$$

$$h = \frac{4 \cdot \sqrt[4]{2}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}; \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \sqrt[4]{2}) \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}) = 4.$$

Ответ №4.

15 Умножим обе части неравенства на -1 :
 $(x - \sin 6)(x + e)(x - 3\pi)(x + 4)(x - 10) \leq 0.$



Сумма целых решений на промежутке $[-5; 4e)$
 равна $-5 - 4 - 2 - 1 + 10 = -2.$ Ответ №3.

16 Можно считать, что $a \neq 0, b \neq 0$ (судя по предложенным вариантам ответов).

$$a \cos x + b \sin x = a + b$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi) = a + b, \text{ где } \varphi - \text{вспомогател. угол.}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ Это уравнение имеет}$$

$$\text{решения, когда } \left| \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1, \text{ т.е. } \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} \leq 1.$$

$a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + b^2$; $a \cdot b \leq 0$. Во всех предложенных вариантах ответа, кроме №4, $a \cdot b > 0$, поэтому выбираем ответ №4.

17 Найдём $E(y)$, где $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$. Для этого ответим на вопрос: при каких y хотя бы одно реш. имеет ур-е $x^2 y + y = x^2 + x + 1$, т.е.

$$(y - 1)x^2 - x + (y - 1) = 0. (*)$$

Очевидно, $1 \in E(y)$, так $y(0) = 1$. Если же $y \neq 1$, то хотя бы 1 реш. ур-е (*) имеет при условии $D \geq 0$, т.е. $1 - 4(y - 1)^2 \geq 0$, $y \in [\frac{1}{2}; 1) \cup (1; \frac{3}{2}]$. Но $y = 1$ уже рассмотрели выше. В итоге $E(y) = [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$.

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \quad \text{Ответ №3.}$$

18 Пусть x, y, z, t — производительности 1-го, 2-го, 3-го и 4-го станков соответственно. $2 \times 30 \text{ мин} = \frac{5}{2}z$;

$$\text{Тогда } \begin{cases} x + z + t = \frac{2}{5} \\ x + y + t = \frac{3}{5} \\ y + z = \frac{2}{3} \end{cases} \quad 1 \times 40 \text{ мин} = \frac{5}{3}z.$$

Сложив все уравнения системы, получим $2 \cdot (x + y + z + t) = \frac{5}{3}$, т.е.

$x + y + z + t = \frac{5}{6}$. Тогда весь пирам при совместной работе будет готов за $\frac{6}{5}z$. Ответ №3.

19 $3 \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = -8 \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2}$; $5 \sin \frac{\alpha}{2} = -7 \cos \frac{\alpha}{2}$,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{7}{5}. \quad \alpha = -2 \arctan \frac{7}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$2\pi n$ не входит на четверть.

$$\arctan \frac{7}{5} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$-2 \arctan \frac{7}{5} \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2} \right)$$

Итак, α — угол III коорд четверти.
Ответ №3

$$\boxed{20} \quad (3^x)^2 - (\lg^2 5 + \lg^2 2 + 27) \cdot 3^x + 27 = 0.$$

Положим $t = 3^x$, тогда $t^2 - (\lg^2 5 + \lg^2 2 + 27)t + 27 = 0$ (*).

$D = (\lg^2 5 + \lg^2 2 + 27)^2 - 4 \cdot 27 > 27^2 - 4 \cdot 27 > 0$, т.е. уравнение (*) имеет 2 разл. действит. корня (относительно t).

По теореме Виета $\begin{cases} t_1 + t_2 = \lg^2 5 + \lg^2 2 + 27 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 27 > 0 \end{cases}$, поэтому

оба корня ур-н (*) (относительно t) положительны.

Из $t_1 \cdot t_2 = 27$ получаем, что $3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 27$, т.е.

$3^{x_1+x_2} = 27$; $x_1 + x_2 = 3$. Ответ N4.

$$\boxed{21} \quad \text{Данное выражение равно } \log_4 \sin 54^\circ + \log_4 \sin 18^\circ =$$

$$= \log_4 (\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ) = \log_4 \frac{\sin 54^\circ \cdot (\sin 18^\circ \cdot 2 \cos 18^\circ)}{2 \cos 18^\circ} =$$

$$= \log_4 \frac{\sin 54^\circ \cdot \sin 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \log_4 \frac{\sin 54^\circ \cdot (\sin 36^\circ \cdot 2 \cos 36^\circ)}{2 \cos 18^\circ \cdot 2 \cos 36^\circ} =$$

$$= \log_4 \frac{\sin 54^\circ \cdot \sin 72^\circ}{4 \cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ} = \log_4 \frac{\cos 36^\circ \cdot \cos 18^\circ}{4 \cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ} =$$

$$= \log_4 \frac{1}{4} = -1. \quad \text{Ответ N1.}$$

[22] Пусть $t = \sqrt{9x-2} - 3$, тогда неравенство принимает вид $|t| + |t-5| \leq 11$, откуда $-3 \leq t \leq 8$, т.е. $-3 \leq \sqrt{9x-2} - 3 \leq 8$,

$$0 \leq \sqrt{9x-2} \leq 11$$

$$0 \leq 9x-2 \leq 121; x \in \left[\frac{2}{9}; \frac{41}{9}\right].$$

Целые решения: 1; 2; 3; ...; 13. Ответ №1.

[23] Пусть a — искомый процент, тогда

$$250 \cdot \left(1 - \frac{a}{100}\right)^4 = 32,4; \quad \left(1 - \frac{a}{100}\right)^4 = 0,1296;$$

$$\left|1 - \frac{a}{100}\right| = 0,6; \quad a = 40 \text{ (с учётом того, что по смыслу задачи } a \in (0; 100)). \text{ Ответ №2.}$$

$$[24] \quad y = \left(2^{\operatorname{tg} x}\right)^2 + \frac{2}{\left(2^{\operatorname{tg} x}\right)^2} = \left(2^{\operatorname{tg} x} - \frac{\sqrt{2}}{2^{\operatorname{tg} x}}\right)^2 + 2\sqrt{2},$$

поэтому наименьшее значение данной функции равно $2\sqrt{2}$ (достигается при тех x , при которых

$$2^{\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{2}}{2^{\operatorname{tg} x}}, \text{ например, при } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}).$$

Ответ №1.

25 $2x^2 + xy - y^2 - 11 = 0$

$(x+y)(2x-y) = 11$. Так x и y — целые, то

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=11 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=11 \\ 2x-y=1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-y=-11 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=-11 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$$

A(4; -3) B(4; 7) C(-4; 3) D(-4; -7).

Из этих четырёх точек наиболее удалёнными от начала координат O являются B и D, при этом

$BO = DO = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$. Ответ N 3.

26 Пусть $x_1; x_1q; x_1q^2$ — действительные корни уравнения $x^3 + 7x^2 - 21x + a = 0$ ($x_1 \neq 0; q \neq 0$).

По теореме Виета для кубического уравнения имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_1q + x_1q^2 = -7 \\ x_1 \cdot x_1q + x_1 \cdot x_1q^2 + x_1q \cdot x_1q^2 = -21 \\ x_1 \cdot x_1q \cdot x_1q^2 = -a \end{cases} \begin{cases} x_1(1+q+q^2) = -7 \quad (1) \\ x_1^2q(1+q+q^2) = -21 \quad (2) \\ (x_1q)^3 = -a \quad (3) \end{cases}$$

Из (1) и (2) получаем, что $x_1q = 3$, тогда, с учётом (3), имеем: $a = -27$.

Проверка $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$

$$(x^3 - 3^3) + (7x^2 - 21x) = 0$$

$$(x-3)(x^2+3x+9) + 7x(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2+10x+9) = 0$$

$$(x-3)(x+1)(x+9) = 0$$

Корни этого уравнения — числа $-1; 3; -9$ — составляют геометрическую прогрессию. Ответ N 4.

$$\boxed{27} \quad \sqrt{5-4x-x^2} = \sqrt{9-(x+2)^2} \in [0; 3].$$

$$\sqrt{5-4x-x^2}-1 \in [-1; 2]$$

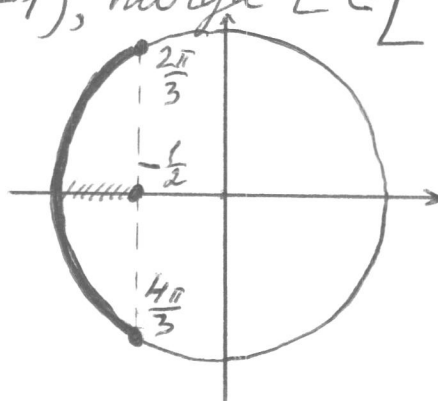
$$(\sqrt{5-4x-x^2}-1)^2 \in [0; 4]$$

$$\frac{x}{6} \cdot (\sqrt{5-4x-x^2}-1)^2 \in [0; \frac{2\pi}{3}]$$

$$\text{Тогда } t = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \cdot (\sqrt{5-4x-x^2}-1)^2, \text{ тогда } t \in [\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}],$$

$$\cos t \in [-1; -\frac{1}{2}]$$

Ответ N5.



$$\boxed{28} \quad p(x) = (x^3 - 7x + 6) \cdot g(x) + x^2 - x + 1$$

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x+3) \cdot g(x) + x^2 - x + 1$$

$$p(1) = 1$$

$$p(2) = 3$$

$$p(-3) = 13$$

$$\frac{p(-3) - p(1)}{p(2)} = \frac{13-1}{3} = 4.$$

Ответ N1.

29 Любое решение x_0 данного неравенства должно удовлетворять условию $-1 \leq 0,5x_0 - 2 \leq 1$; $x_0 \in [2; 6]$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что из чисел 2; 3; 4; 5; 6 решениями данного неравенства являются только 2 и 6, их сумма 8. Ответ №2.

30 Это задание, конечно, удобно решать методом областей, но, учитывая особенности формулировки, можно поступить так. П.к. неравенство должно выполняться $\forall x \in [-1; 2]$, то, в частности, для $x = -1$ и $x = 2$. В первом случае получаем $(a-1)(a-5) \leq 0$, т.е. $a \in [1; 5]$. Во втором случае $(a-4)(a-8) \leq 0$, т.е. $a \in [4; 8]$. Итак, получили необходимое условие на параметр: $a \in [4; 5]$. П.к. требуется найти только целые a , то достаточно проверить $a = 4$ и $a = 5$.

При $a = 4$ имеем: $(4-x^2)(-x-2) \leq 0$, т.е. $x \in (-\infty; 2]$.

Очевидно, $[-1; 2] \subset (-\infty; 2]$.

При $a = 5$ имеем: $(5-x^2)(-x-1) \leq 0$, т.е.

$x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [-1; \sqrt{5}]$, это множество тоже содержит в себе отрезок $[-1; 2]$.

Итак, условию задачи удовлетворяют только $a = 4$ и $a = 5$, их сумма равна 9.

Ответ №5.