

1 Время, затраченное на участок пути S км, сначала было $\frac{S}{100}$, а после увеличения скорости стало $\frac{S}{125}$. Так как $\frac{S}{125} = 0,8 \cdot \frac{S}{100}$, то новое время составляет 80% от старого, т.е. уменьшилось на 20%. Ответ №3.

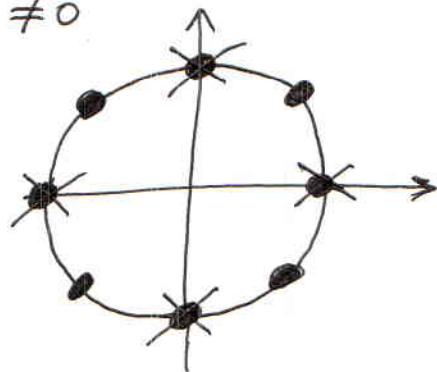
2 Запишем все варианты ответов через арктангенс: $\arctg 0,25$; $\arctg \frac{2}{3\pi}$; $\arctg \frac{2}{9}$; $\arctg \frac{1}{3}$; $\arctg 0,3$. Из чисел $0,25$; $\frac{2}{3\pi}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{3}$; $0,3$ наименьшим является $\frac{2}{3\pi}$, а т.к. арктангенс возрастает на R , то наименьший ответ $\arctg \frac{2}{3\pi} = \arcsctg 1,5\pi$. Ответ №2.

3 Данное выражение можно записать в виде $2n-3 + \frac{7}{n+2}$. Чтобы это выражение было целым числом (при $n \in \mathbb{Z}$), $n+2$ должно быть целым делителем числа 7, т.е. $n+2 \in \{\pm 1; \pm 7\}$. Итак, нас устраивают только $n = -1; -3; 5; -9$, их среднее арифметическое равно -2 . Ответ №1.

$$\boxed{4} \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \sin 4x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin 4x = 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ N 3.



$$\boxed{5} \quad \text{Координаты точки пересечения данных графиков удовлетворяют системе} \begin{cases} 213y = 2887 - 787x \\ 787y = 2313 - 213x \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$-574y = 574 - 574x, \text{ т. е. } x - y = 1. \text{ Ответ N 3.}$$

$$\boxed{6} \quad \text{Нули данной функции найдём, решив уравнение } x^3 - 3x^2 - 4x = \sqrt{\cos \pi x - 1}.$$

Правая часть уравнения имеет смысл при $\cos \pi x \geq -1$, однако косинус не может принимать значения вне отрезка $[-1, 1]$, поэтому остаётся единственная возможность: $\cos \pi x = 1$.

$$\text{Имеем: } \begin{cases} \cos \pi x = 1 \\ x(x^2 - 3x - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2n, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Таким образом, сумма нулей данной функции равна $0 + 4 = 4$. Ответ N 1.

$$\boxed{7} \text{ Преобразуем дробь } \frac{1}{\sqrt{2a} - \sqrt{2a-1}} = \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2a-1}}{2a - (2a-1)} =$$

$= \sqrt{2a} + \sqrt{2a-1}$, тогда всё выражение равно

$$\sqrt{2a+1} - \sqrt{2a} + \sqrt{2a} + \sqrt{2a-1} = \sqrt{2a+1} + \sqrt{2a-1} =$$

$$= \frac{(2a+1) - (2a-1)}{\sqrt{2a+1} - \sqrt{2a-1}} = \frac{2}{\sqrt{2a+1} - \sqrt{2a-1}}. \text{ Ответ } \text{N} 3.$$

$$\boxed{8} \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \dots}}}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{27}} \cdot \dots =$$

$$= 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots} = 2^{\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

(использовались формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Ответ N 5.

$$\boxed{9} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{\pi}{4}; \quad \alpha = -2 \arctg \frac{\pi}{4}.$$

т.к. $\frac{\pi}{4} \in (0; 1)$, то $\arctg \frac{\pi}{4} \in (0; \frac{\pi}{4})$, тогда

$$2 \cdot \arctg \frac{\pi}{4} \in (0; \frac{\pi}{2}) \text{ и } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}; 0), \text{ т.е. } \alpha - \text{угол}$$

IV четверти. Ответ N 2.

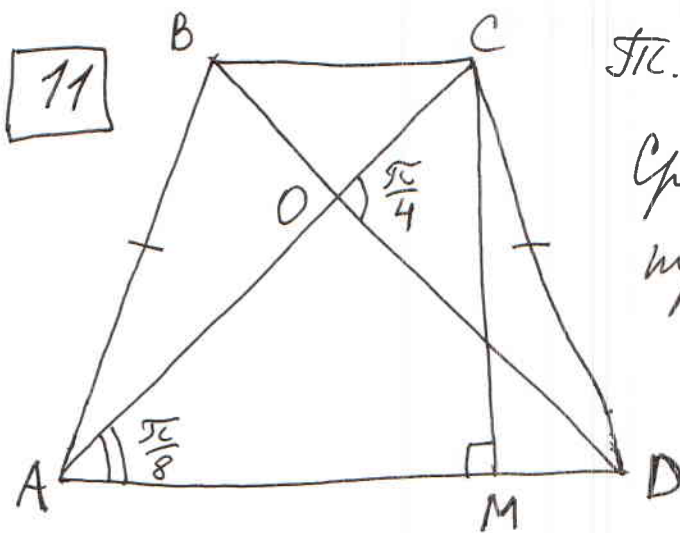
$$\boxed{10} \text{ Ответ N 1 не подходит, т.к. } \log_{0.5} \log_{0.5} 0.5 = \log_{0.5} 1 = 0.$$

Рассмотрим ответ N 2: т.к. $\log_4 \sqrt{32} > 1$, то

$$\log_{\pi} \log_4 \sqrt{32} > \log_{\pi} 1 = 0, \text{ т.е. ответ N 2 является}$$

положительным числом.

Ответ N 2.



П.к. $\angle COD = \frac{\pi}{4}$, то $\angle CAD = \frac{\pi}{8}$.

Средняя линия равнобедренной трапеции ABCD равна AM (см. рис.)

Из $\triangle ACM$ $AM = \frac{CM}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \operatorname{tg} \frac{\pi/4}{2} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Итак, $AM = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}$. Ответ N 5.

12 Используя периодичность тригонометрических функций и формулы приведения, преобразуем числитель:

$$\sin\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos 2 \cdot \operatorname{ctg} 1.$$

$$\text{Знаменатель равен } \sin \sqrt{(2 - \pi)^2} \cdot \cos \sqrt{(2\pi + 2)^2} = \\ = \sin(\pi - 2) \cdot \cos(2\pi + 2) = \sin 2 \cdot \cos 2.$$

И.о., исходное выражение равно $\frac{\cos 2 \cdot \operatorname{ctg} 1}{\sin 2 \cdot \cos 2} =$

$$= \frac{\operatorname{ctg} 1}{\sin 2} = \frac{\cos 1}{\sin 1 \cdot (2 \sin 1 \cdot \cos 1)} = \frac{1}{2 \sin^2 1} =$$

$$= 0,5 \cdot \sin^{-2} 1. \quad \text{Ответ N 4.}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{13} \quad \cos \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} \sin(\beta - \alpha) + \frac{1}{2} \sin(\beta + \alpha) = \\
 &= \frac{1}{2} \sin 330^\circ + \frac{1}{2} \sin 405^\circ = \frac{1}{2} \sin(360^\circ - 30^\circ) + \frac{1}{2} \sin(360^\circ + 45^\circ) = \\
 &= \frac{1}{2} \sin(-30^\circ) + \frac{1}{2} \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}. \text{ Ответ } \text{N} 4.
 \end{aligned}$$

$$\boxed{14} \quad (x-a) \cdot \lg(5x-x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=0 \\ 5x-x^2-3 > 0 \\ \lg(5x-x^2-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ a^2-5a+3 < 0 \\ x=1 \\ x=4. \end{cases}$$

Два различных корня будет, когда система $\begin{cases} x=a \\ a^2-5a+3 < 0 \end{cases}$ либо не имеет решений, либо имеет, но только 1 или 4.

В 1-ом случае $a^2-5a+3 \geq 0$, т.е. $a \in (-\infty; \frac{5-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{13}}{2}; +\infty)$.

Во 2-м случае $a=1, a=4$.

Ит.о., надо найти все целые $a \in (-4; 6)$, принадлежащие $(-\infty; \frac{5-\sqrt{13}}{2}] \cup \{1\} \cup \{4\} \cup [\frac{5+\sqrt{13}}{2}; +\infty)$. Это числа

$-3; -2; -1; 0; 1; 4; 5$, их сумма равна 4. Ответ N5.

$\boxed{15}$ Пусть в апреле проездной стоит x руб. и пусть кол-во проданных билетов в марте a штук, тогда в апреле продажи $0,77a$ проездных.

Выручка в марте $660 \cdot a$, в апреле $0,77a \cdot x$,

и это на 5% больше, чем в марте, т.е.

$$0,77ax = 1,05 \cdot (660a), \text{ откуда } x = 900 \text{ (руб.)}$$

$(a \neq 0)$

Ответ N1.

16 Условий коэффициент касательной равен $f'(1)$.

П.к $f'(x) = 1 + (\sin(x-1))^2 \cdot 2(x-1) - 2\sin x \cdot \cos x$, то

$f'(1) = 1 - 2 \cdot \sin 1 \cdot \cos 1 = 1 - \sin 2$. Ответ N 3.

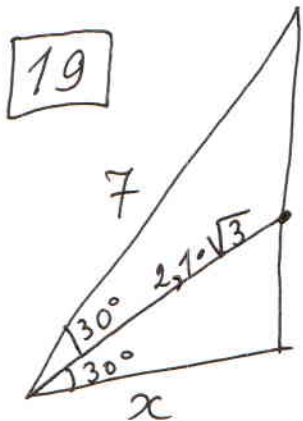
17 Пусть $t = 2x - 1$, тогда $x = \frac{t+1}{2}$ и $f(t) = 1 - 4 \cdot \left(\frac{t+1}{2}\right)^2$,

$f(x) = 1 - (x+1)^2$. Наибольшее и наименьшее значение этой функции на отрезке $[-3; 0]$ равны 1 и -3 соответственно, разность между ними равна 4. Ответ N 3.

18 Система $\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ (a+2)x + 4y = -3 \end{cases}$ имеет бесконечное

мн-во решений, когда $\frac{2}{a+2} = \frac{a}{4} = \frac{3}{-3}$, т.е. при

$a = -4$. Ответ N 5 (легко проверить, что $-8 \cos^2 135^\circ = -4$).



19 Воспользуемся формулой для биссектрисы:

$$l = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}. \text{ В нашем случае:}$$

$$2,1 \cdot \sqrt{3} = \frac{2 \cdot 7 \cdot x}{7+x} \cdot \cos 30^\circ, \text{ откуда } x = 3.$$

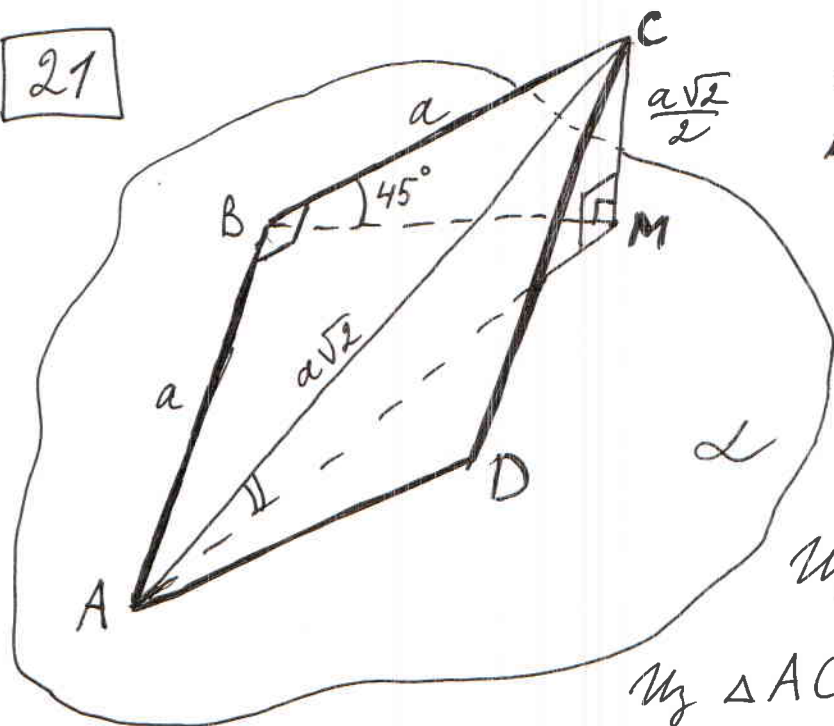
Ответ N 4.

20 Пусть на очистку поступает x т воды, в том числе $0,06x$ т примесей. Пусть на производство возвращается a т воды, тогда в отстойник сливается $(x-a)$ т воды. На производство возвращается $0,02a$ т, в отстойник сливается $0,52 \cdot (x-a)$ т.

Тогда $0,06x = 0,02a + 0,52 \cdot (x-a)$, откуда $\frac{a}{x} = \frac{23}{25}$.

Нам надо узнать, какой процент воды, поступающей на очистку, сливается в отстойник, т.е. $\frac{x-a}{x} \cdot 100\% = (1 - \frac{a}{x}) \cdot 100\% = (1 - \frac{23}{25}) \cdot 100\% = 8\%$. Ответ №1.

21



Пусть сторона AB квадрата $ABCD$ лежит в плоскости L и пусть CM — перпендикуляр к L . Обозначим $BC = a$, тогда $AC = a\sqrt{2}$.

Из $\triangle BCM$ находим $CM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Из $\triangle ACM$ $\sin \angle CAM = \frac{CM}{AC} =$

$= \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, поэтому величина искомого угла

равна 30° . Ответ №4.

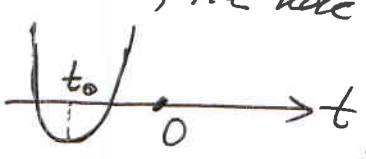
22 Для решения задачи найдём $E(y)$, т.е. найдём все значения параметра y , при которых уравнение $y \cdot (x^2 - 2x + 2) = x^2 - x + 1$ имеет хотя бы одно решение. После преобразования: $(y-1)x^2 - (2y-1)x + (2y-1) = 0$ (*)

а) Если $y=1$, то $x=1$.

б) Если $y \neq 1$, то (*) — квадратное уравнение, оно имеет хотя бы одно решение при $D \geq 0$, т.е. $(2y-1)^2 - 4(y-1)(2y-1) \geq 0$,
 $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ (крае $y=1$).

Объединяя случаи а) и б), получим: $E(y) = [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$.

П.о., разность между наибольшим и наименьшим значениями функции равна $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$. Ответ №1.

23 Пусть $x^2 = t$. Рассмотрим $f(t) = t^2 + 2(3-2a)t + 4a^2 - 16a + 13$, графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Мы ищем те значения a , при которых неравенство $f(t) > 0$ выполняется при всех $t > 0$, т.е. как устраивает такое расположение параболы , а также случаи, когда парабола целиком находится выше оси t , т.е. когда $D < 0$.

В 1-ом случае $\begin{cases} t_0 < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} 2a-3 < 0 \\ 4a^2-16a+13 > 0 \end{cases}$.

Во 2-м случае $4a-4 < 0$.

П.к. в задании требуется найти только целые $a \in (-5; 3)$, то это будут $-4; -3; -2; -1; 0; 1$, их сумма равна -9 .
 Ответ №5.

24 Как известно, область значений выражения $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ является отрезок $[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$,

поэтому $-40 \sin x + \sqrt{80} \cdot \cos x \in [-\sqrt{1680}; \sqrt{1680}]$.

А так как $41 = \sqrt{1681} > \sqrt{1680}$, то

$41 - 40 \sin x + \sqrt{80} \cdot \cos x > 0$ при всех x .

Поэтому данное в условии задания уравнение равно-

сильно такому: $(\sin \pi x) \cdot \sqrt{(x+2,5) \cdot (70-x)} = 0$.

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0 \\ (x+2,5) \cdot (70-x) \geq 0 \\ \sqrt{(x+2,5) \cdot (70-x)} = 0 \end{cases} \begin{cases} x = n, n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-2,5; 70] \\ x = -2,5 \\ x = 70 \end{cases}$$

Корни исходного уравнения: $-\frac{5}{2}; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; 70$ — всего 74 числа. Ответ №1.

25 Масса золота в 1-ом металле в унциях от $0,12 \cdot 5$ до $0,32 \cdot 5$, т.е. от 0,6 до 1,6 (включительно).

Масса золота во 2-м металле от $0,4 \cdot 9$ до $0,6 \cdot 9$, т.е. от 3,6 до 5,4 (включительно). Поэтому в новом

сплаве золота может оказаться от $0,6 + 3,6 = 4,2$ (кг) до $1,6 + 5,4 = 7$ (кг). Тогда доля золота будет от

$\frac{4,2}{14}$ до $\frac{7}{14}$, т.е. от 0,3 до 0,5 включительно.

Ответ №3.

26 Пусть $a = 4^{\sqrt[3]{\log_4 3}}$, $b = 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 4}}$. Рассмотрим логарифмы этих чисел по основанию 4:

$$\log_4 a = \sqrt[3]{\log_4 3};$$

$$\log_4 b = \sqrt[3]{\log_3^2 4 \cdot \log_4 3} = \sqrt[3]{\frac{1}{\log_4^2 3} \cdot \sqrt[3]{\log_4^3 3}} = \sqrt[3]{\log_4 3}.$$

Итак, $\log_4 a = \log_4 b$. В силу строгой монотонности

функции $y = \log_4 x$ получаем, что $a = b$.

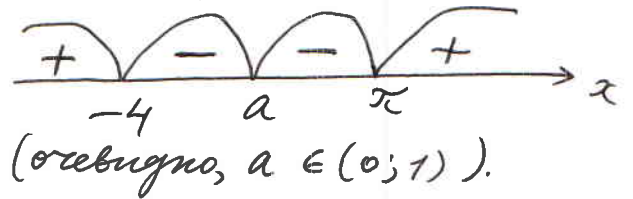
Неравенство можно теперь записать так:

$$(x-a) \cdot (\pi-x) \cdot (b-x) \cdot (x+4) \leq 0$$

$$(x-a) \cdot (x-\pi) \cdot (x-b) \cdot (x+4) \leq 0. \text{ С учётом } a=b:$$

$$(x-a)^2 \cdot (x-\pi) \cdot (x+4) \leq 0$$

$$x \in [-4; \pi].$$



Заметим, что все эти значения x принадлежат указанному в условии задачи отрезку $[-6; 5]$.

$$\text{Сумма целых решений} = -4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = -4.$$

Ответ №1.

$$27 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{откуда } -\frac{2\pi}{3} + \pi n \leq x \leq \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ т. е.}$$

$$\dots \cup \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right] \cup \dots$$

Целыми решениями на отрезке $[0; 2\pi]$ являются

0; 2; 3; 5; 6 — всего 5 чисел. Ответ №1.

28 Ответ на вопрос задачи, очевидно не изменится, если мы заменим данное нерав. на $\sqrt{t+2a} \geq t$.
Далее, наверное, лучше идти „от ответов“.

Проверим ответ №1: при $a=6$ имеем $\sqrt{t+12} \geq t$.

Очевидно, что множество всех решений этого неравенства более широкое, чем отрезок длины 4 (например, решениями явл. $t=-12$ и $t=0$).

Проверим ответ №2: при $a=-2$: $\sqrt{t-4} \geq t$. Очевидно, что решений нет (например, графически).

Проверим ответ №3: при $a=1$ имеем $\sqrt{t+2} \geq t$.

Здесь решением является отрезок $[-2; 2]$, его длина равна 4.

Тогда оставшиеся два значения a (ответ №4 и ответ №5) можно не проверять.

Ответ №3.

$$\boxed{29} \quad \sqrt{2x+4-2y} + \sqrt{4y-x-5} = 3 \cdot \sqrt{7-x-2y} \quad (*).$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+4-2y \geq 0 \\ 4y-x-5 \geq 0 \\ 7-x-2y \geq 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x \geq y-2 \quad (1) \\ x \leq 4y-5 \quad (2) \\ x \leq 7-2y \quad (3). \end{cases}$

из (1) и (2) получаем, что $y-2 \leq 4y-5$, т.е. $y \geq 1$,

а из (1) и (3), что $y-2 \leq 7-2y$, т.е. $y \leq 3$.

П.к. мы ищем только целые решения уравнения (*),

то $y \in \{1; 2; 3\}$.

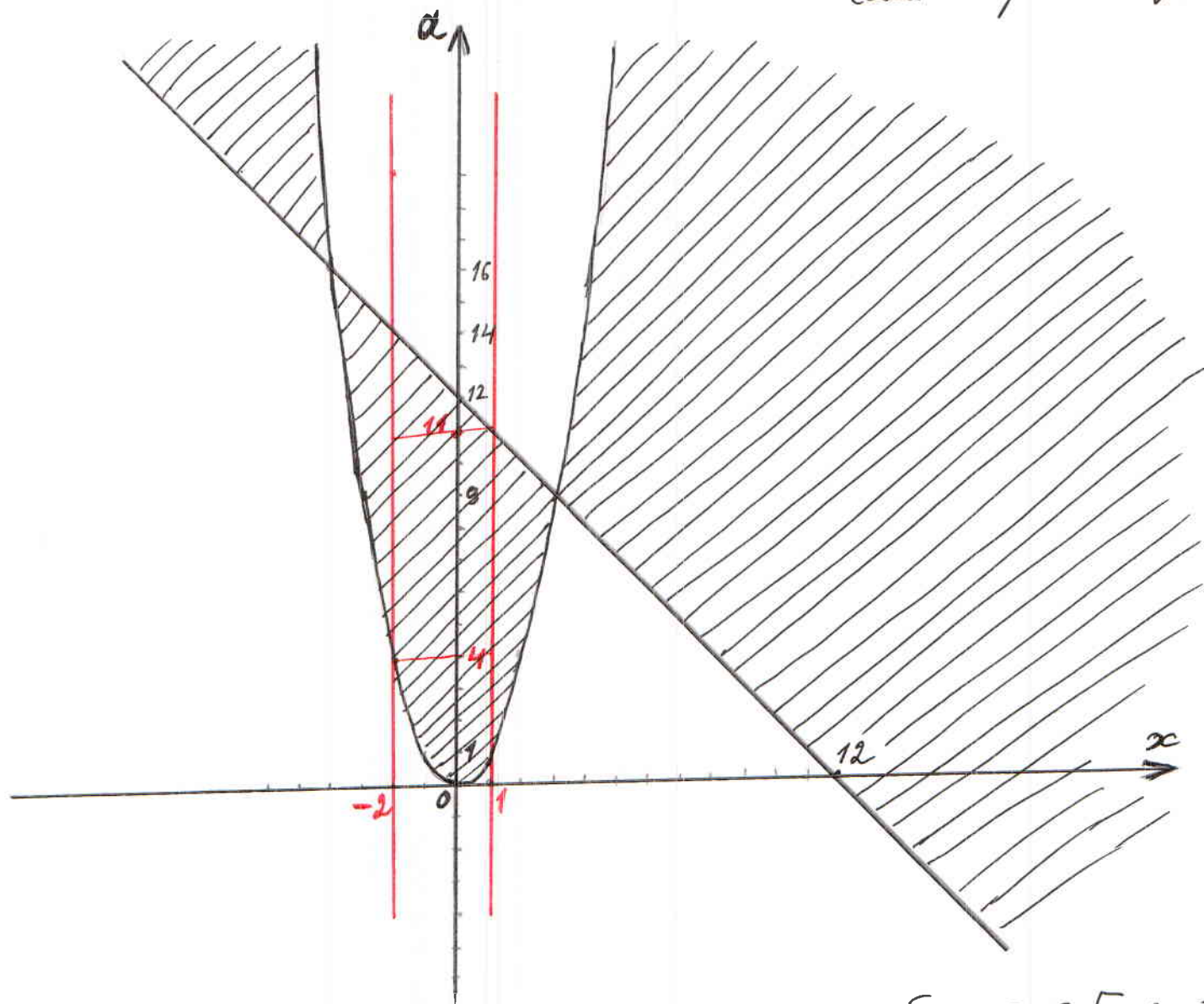
✓ Подставим $y=1$ в (*): $\sqrt{2x+2} + \sqrt{-x-1} = 3 \cdot \sqrt{5-x}$.
ОДЗ этого уравнения состоит из одного числа $x=-1$,
но оно не является корнем уравнения.

✓ Подставим $y=2$ в (*): $\sqrt{2x} + \sqrt{3-x} = 3 \cdot \sqrt{3-x}$
 $\sqrt{2x} = 2\sqrt{3-x}$
 $x=2$

✓ Подставим $y=3$ в (*): $\sqrt{2x-2} + \sqrt{7-x} = 3 \cdot \sqrt{1-x}$.
ОДЗ этого уравнения состоит из одного числа $x=1$,
но оно не явл. корнем ур-я.

Итак, $(2; 2)$ — единственное реш. ур-я (*)
в целых числах. Ответ №1.

30 $(a-x^2) \cdot (a-(12-x)) \leq 0$. Изобразим на координатной плоскости Oxa множество всех точек $(x; a)$, удовлетворяющих этому неравенству (см. штриховку)



Неравенство выполняется для любых $x \in [-2; 1]$ при $a \in [4; 11]$. Сумма целых чисел из этого отрезка равна $4+5+\dots+11=60$.

Ответ №5.