

1	Значение выражения $\frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{2a-1}} + \sqrt{2a+1} - \sqrt{2a}$ при $a > \frac{1}{2}$ равно				
1	$\sqrt{2a-1} - \sqrt{2a+1}$	2	$\frac{-2}{\sqrt{2a-1} - \sqrt{2a+1}}$	3	$2\sqrt{2a}$
4	$\sqrt{2a+1} - \sqrt{2a-1}$	5	$4a$		

Используя прием избавления от иррациональности в числителе (знаменателе) дроби, получим сначала $\sqrt{2a-1} + \sqrt{2a+1}$, а затем $\frac{-2}{\sqrt{2a-1} + \sqrt{2a+1}}$.

Правильный ответ: 2.

2	Если $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y + 5 = 0$, то $x + y$ равно				
1	4	2	5	3	3
		4	1	5	2

$$(x-2y)^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ x-2=0 \\ y-1=0 \end{cases}.$$

Правильный ответ: 3.

3	Площадь области на плоскости Oxy , задаваемой условиями $\begin{cases} (x+y)^2 \leq 4 \\ x-1 \leq 2 \end{cases}$, равна				
1	16	2	замкнутой области нет	3	12
		4	8	5	6

$$\begin{cases} -2 \leq x+y \leq 2 \\ -2 \leq x-1 \leq 2 \end{cases}$$

Каждое из этих двойных неравенств задает на плоскости Oxy "полосу", а пересечением этих двух полос является параллелограмм, площадь которого несложно найти.

Правильный ответ: 1.

4	Среди приведенных, указать промежутки, где уравнение $\frac{ x^2 - 2x - 3 }{x^2 - 2x - 3} + (x-a)^2 = 0$ имеет два различных корня				
1	$a \in (-1; 1)$	2	$a \in (-1; 3)$	3	$a \in (-\infty; -1)$
4	$a \in (0; 2)$	5	$a \in (4; +\infty)$		

Нас устраивает только случай $x^2 - 2x - 3 < 0$ (в противном случае уравнение не будет иметь корней), тогда $-1 + (x-a)^2 = 0$, то есть $\begin{cases} -1 < x < 3 \\ x = a \pm 1 \end{cases}$. Поскольку уравнение должно иметь 2 корня, то $\begin{cases} a+1 < 3 \\ a-1 > -1 \end{cases}$.

Правильный ответ: 4.

5	Если влажность пшеницы, поступившей на зерносушилку, составляла 32%, а после просушки оказалась равной 15%, то пшеница потеряла в весе				
1	25%	2	17%	3	20%
		4	23,5%	5	15%

Если на зерносушилку поступило x т пшеницы, то сухого вещества в ней было $0,68x$, что составляет 85% от массы пшеницы после просушки. Т.к. $0,68x/0,85=0,8x$, делаем вывод, что масса пшеницы составит 80% первоначальной. **Правильный ответ: 3.**

6	Число корней уравнения $ x - \sin^2(\arctg^{-1}(\sqrt{7+3\sqrt{18}})) - \cos^2 15^\circ = 2$ равно				
1	4	2	0	3	2
		4	3	5	1

Уравнение принимает вид $|x - \sin^2 \alpha| - \cos^2 15^\circ = \pm 2$. Т.к. $0 < \cos^2 15^\circ < 1$, то иметь решение будет лишь уравнение $|x - \sin^2 \alpha| = \cos^2 15^\circ + 2$, т.о. $x = \sin^2 \alpha \pm (\cos^2 15^\circ + 2)$.

Правильный ответ: 3.

7	В области $\{-2 \leq y + 2x \leq 4, -2 \leq y + x \leq -1\}$ наибольшее значение $\sqrt{x^2 + y^2}$ равно				
1	10	2	5	3	8
4	$\sqrt{17}$	5	7,5		

Указанная область представляет собой пересечение двух "полос", т.е. параллелограмм ABCD, где A(−1;0), B(5;−6), C(6;−8), D(0;−2). Выражение $\sqrt{x^2 + y^2}$ можно интерпретировать как расстояние от начала координат до точки M(x;y). Наиболее удаленная от начала координат точка параллелограмма ABCD – это C(6;−8). Поэтому наибольшее значение $\sqrt{x^2 + y^2}$ составит $\sqrt{6^2 + (-8)^2}$.

Правильный ответ: 1.

8	Наименьший корень уравнения $\sqrt{x - \sin 15^\circ} + \sqrt{\operatorname{tg} 15^\circ - x} = \sqrt{\operatorname{tg} 15^\circ - \sin 15^\circ}$, равен				
1	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	2	уравнение корней не имеет	3	$2 - \sqrt{3}$
4	$2 + \sqrt{3}$	5	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$		

После возведения в квадрат получим $2 \cdot \sqrt{x - \sin 15^\circ} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} 15^\circ - x} = 0$.
Наименьший корень данного уравнения
 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Правильный ответ: 1.

9	$\arccos(\cos 4)$ равен				
1	$4 - \pi$	2	4	3	$\pi + 4$
4	$\pi - 4$	5	$2\pi - 4$		

$\cos 4 = \cos(2\pi - 4)$ и $2\pi - 4 \in [0; \pi]$.

Правильный ответ: 5.

10	До кризиса фонд зарплаты учителей составлял 30% общих расходов. Во время кризиса фонд зарплаты уменьшился на $\frac{620}{9}\%$, то есть при неизменных остальных расходах средства на зарплату от общих расходов составляют				
1	13%	2	16, (6)%	3	$\frac{28}{3}\%$
4	20%	5	$\frac{200}{17}\%$		

Пусть до кризиса общие расходы составляли x , в том числе $0,3x$ – фонд з/п учителей, а $0,7x$ – остальные. После кризиса фонд зарплаты стал $100\% - \frac{620}{9}\% = \frac{280}{9}\%$ от $0,3x$, т.е. $\frac{7x}{75}$, а общие расходы стали $\frac{7x}{75} + 0,7x = \frac{119x}{150}$. Осталось найти, сколько процентов составляет $\frac{7x}{75}$ от $\frac{119x}{150}$. **Правильный ответ: 5.**

11	Сумма всех значений x , при которых числа 4^x ; $3,5 \cdot 10^x$; $10 \cdot 25^x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, равна				
1	$\lg^{-1} 0,4$	2	таких x нет	3	$\log_{0,4} 5$
4	$\log_{0,4} 2$	5	$\lg^{-1} 2,5$		

Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получим $7 \cdot 10^x = 4^x + 10 \cdot 25^x$. Разделим обе части уравнения на 25^x :
 $7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 + 10$ и решим как квадратное относительно $\left(\frac{2}{5}\right)^x$,
получим $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 2$ и $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 5$. Сумма корней составит $\log_{0,4} 2 + \log_{0,4} 5 = \log_{0,4} 10 = \lg^{-1} 0,4$.

Правильный ответ: 1.

12	Все значения параметра a , при которых функция $y = \sqrt{(2\sqrt{a}-1)x^2 + (\sqrt{a}-1)x + 0,2}$ определена на всей числовой оси, образуют множество								
1	$[0; 9]$	2	$(0, 36; +\infty)$	3	$[9; +\infty)$	4	$[0, 36; 9]$	5	$[1; 9]$

Необходимо найти такие a , при которых неравенство $(2\sqrt{a}-1)x^2 + (\sqrt{a}-1)x + 0,2 \geq 0$ выполняется при всех x . Если $2\sqrt{a}-1=0$, то получим линейное относительно x неравенство, выполняющееся не для любого x . Для случая $a \in [0; 0,25) \cup (0,25; +\infty)$ необходимо, чтобы парабола $y = (2\sqrt{a}-1)x^2 + (\sqrt{a}-1)x + 0,2$ целиком была выше оси абсцисс или касалась ее сверху, т.е.

$$\begin{cases} 2\sqrt{a}-1 > 0 \\ D = (\sqrt{a}-1)^2 - 4 \cdot (2\sqrt{a}-1) \cdot 0,2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{. Правильный ответ: 4.}$$

13	Указать все a , при которых уравнение $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} \times$ $\times \frac{x^2 + (x+2)\sqrt{x^2-x-2}-4}{x^2 - (1-x)\sqrt{x^2-x-2}-1} = a$ имеет хотя бы один корень								
1	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	2	$(-1; -\frac{1}{4})$	3	$(1; 4)$	4	$(-1; -\frac{1}{3})$	5	$(1; +\infty)$

Преобразуем левую часть уравнения, при условии выполнения ОДЗ ($x > 2$):

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{(x-2)(x+2) + (x+2)\sqrt{(x+1)(x-2)}}{(x-1)(x+1) + (x-1)\sqrt{(x+1)(x-2)}} =$$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{(x+2)\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1})}{(x-1)\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = \frac{x+2}{x-1} \cdot$$

Осталось выяснить, при каких a уравнение $1 + \frac{3}{x-1} = a$ имеет хотя бы 1 корень, больший 2. Это можно сделать, например, графически. **Правильный ответ: 3.**

14	Все значения a , при которых система уравнений $\begin{cases} y = - x - a + 1 \\ x = -\sqrt{2y - y^2} \end{cases}$ имеет решения, образуют множество								
1	$[-\sqrt{2}; 1]$	2	$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$	3	$[-1; 1]$	4	$[-\sqrt{2}; 0]$	5	$[-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$

Первое уравнение задает на плоскости "уголок" с вершиной $(a; 1)$, второе – левую полуокружность с центром в $(0; 1)$ и радиусом 1. Система имеет хотя бы одно решение, если "уголок" и полуокружность имеют хотя бы одну общую точку. **Правильный ответ: 1.**

15	Расстояние между корнями квадратного уравнения с рациональными коэффициентами, одним из корней которого является число $2 \cdot (7 - 4\sqrt{3})^{-1}$, равно								
1	16	2	$16\sqrt{3}$	3	$4 + 2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	5	4

По условию $x_1 = \frac{2}{7-4\sqrt{3}} = 14 + 8\sqrt{3}$. Т.к. все коэффициенты (по теореме Виета, это сумма и произведение корней) квадратного уравнения рациональны, то другой корень есть число, сопряженное первому, т.е. $x_2 = 14 - 8\sqrt{3}$. Расстояние между ними можно найти как $|x_1 - x_2|$. **Правильный ответ: 2.**

16	Сумма наибольшего и наименьшего значений функции $y = \frac{4}{3}\sqrt{\cos^2(\frac{3}{2}\pi + x)} + \frac{1}{3}\sin^2 x - 1$ заключена в интервале								
1	$(-1; 0,5)$	2	$(-4; -\pi)$	3	$(\pi; 4)$	4	$(1; 3)$	5	$(2; 3)$

Запишем функцию так: $y = \frac{4}{3} \cdot |\sin x| + \frac{1}{3} \cdot \sin^2 x - 1$. Пусть $t = |\sin x|$, тогда задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значения выражения $\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t - 1$ при $t \in [0; 1]$. **Правильный ответ: 1.**

17 Наименьшее значение функции $f(x) = (0,1x - 0,2)(x + 3)(x - 4)(0,2x + 1) - 2,02$ равно

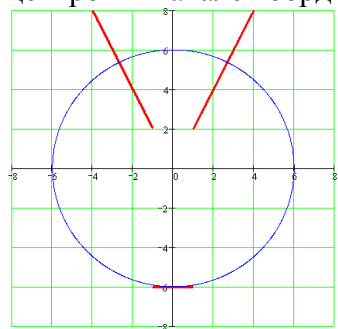
1 -1 **2** -3 **3** 2 **4** -2 **5** 1

Преобразуем выражение, задающее функцию: $0,02(x - 2)(x + 3)(x - 4)(x + 5) + 2,02 = 0,02(x^2 + x - 6)(x^2 + x - 20) - 2,02$. Обозначив $t = x^2 + x - 20$, остается найти наименьшее значение функции $y = 0,02 \cdot (t + 14) \cdot t - 2,02$ при условии $t \geq \frac{-81}{4}$. **Правильный ответ: 2.**

18 Линии $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{|x - 1|} + \frac{x^2 - 2x - 3}{|x + 1|}$ и $x^2 + y^2 = a^2$ пересекаются в трех точках, если

1 $|a| > 4$ **2** $8 < |a| < 9$ **3** такое невозможно
4 $|a| = 6$ **5** $1 < |a| < \sqrt{2}$

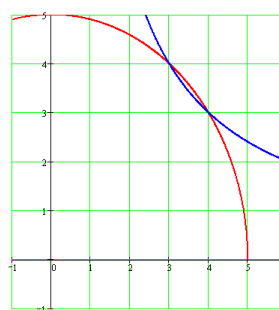
Рассмотрев три случая и раскрыв модули, первую функцию можно записать в виде $y = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ -6, & -1 < x < 1. \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$. Вторая линия – окружность с центром в начале координат и радиусом $|a|$.



Правильный ответ: 4.

19 Сумма целых решений неравенства $\sqrt{25 - x^2} \leq \frac{12}{x}$ равна

1 3 **2** 0 **3** 7 **4** 15 **5** -7



Полуокружность $y = \sqrt{25 - x^2}$ и гипербола $y = \frac{12}{x}$ имеют две общие точки (3;4) и (4;3).

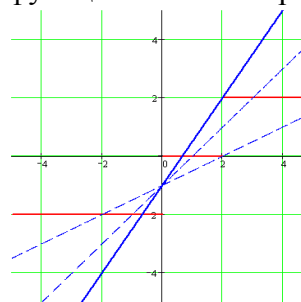
Полуокружность не выше гиперболы при $x \in (0;3] \cup [4;5]$.

Правильный ответ: 4.

20 Система уравнений $\begin{cases} y = \frac{|x|}{x} + \frac{|x-2|}{x-2} \\ y = kx - 1 \end{cases}$ имеет три решения при всех k из промежутка

1 $[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}]$ **2** (0; 1) **3** $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ **4** $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ **5** $(\frac{1}{4}; \frac{3}{2})$

Первую функцию запишем как $y = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < 2. \\ 2, & x > 2 \end{cases}$. Графиком второй функции является прямая, проходящая через точку (0;-1).



Правильный ответ: 1.

21	Ящик вмещает 12 кг риса или 16 кг пшена. Если ящик заполнить и тем и другим на одинаковые суммы, то содержимое будет весить 15 кг и стоить 90 руб. Суммарная стоимость 1 кг риса и 1 кг пшена равна 1 15 руб. 2 18,75 руб. 3 14 руб. 4 17 руб. 5 12 руб.
-----------	---

Пусть объем ящика V . 1 кг риса занимает $\frac{V}{12}$, а пшена – $\frac{V}{16}$. Если засыпать a кг риса и $15-a$ кг пшена, будем иметь: $\frac{aV}{12} + \frac{(15-a)V}{16} = V$, откуда находим $a=3$. Стоимости риса и пшена можно найти из условий, что 3 кг риса стоит 45 руб. (90/2), а 12 кг пшена также 45 руб.
Правильный ответ: 2.

22	Множеством значений функции $y = \frac{x^2 + 4x - 12 + (x+2)\sqrt{x^2 - 36}}{(\sqrt{x-6})^2(x+2) + (x-2)\sqrt{x^2 - 36}}$ является 1 $(-\infty; 1)$ 2 $(6; +\infty)$ 3 $(1; +\infty)$ 4 $[2; 6)$ 5 $(0; 1]$
-----------	---

Преобразуем выражение, задающее функцию, при условии выполнения ОДЗ ($x > 6$):

$$\frac{(x-2)(x+6) + (x+2)\sqrt{(x-6)(x+6)}}{(x+2)(x-6) + (x-2)\sqrt{(x-6)(x+6)}} = \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-6}} \cdot \frac{(x-2)\sqrt{x+6} + (x+2)\sqrt{x-6}}{(x+2)\sqrt{x-6} + (x-2)\sqrt{x+6}} = \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-6}} = \sqrt{\frac{x+6}{x-6}}.$$

Область значений $f(x) = \frac{x+6}{x-6} = 1 + \frac{12}{x-6}$, $x > 6$ совпадает с интервалом $(1; +\infty)$, а область значений $y = \sqrt{f(x)}$ также совпадет с интервалом $(1; +\infty)$.

Правильный ответ: 3.

23	Сумма $\arcsin\left(\cos \frac{23}{24}\pi\right) + \arccos\left(\sin \frac{23}{24}\pi\right)$ равна 1 $\frac{13}{24}\pi$ 2 $\frac{3}{8}\pi$ 3 0 4 $-\frac{3}{8}\pi$ 5 $-\frac{\pi}{12}$
-----------	--

С учетом формулы $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, ($|a| \leq 1$) имеем:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos \frac{23\pi}{24}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin \frac{23\pi}{24}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{23\pi}{24}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{24}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{23\pi}{24}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}\right) = 0$$

Правильный ответ: 3.

24	Произведение корней уравнения $x^{\log_7 5} = 25 \cdot 8^{\log_7 7}$ равно 1 16 2 49 3 $\log_5 7$ 4 36 5 25
-----------	---

Прологарифмируем по основанию 7 (при $x > 0$, $x \neq 1$): $\log_7 5 \cdot \log_7 x = \log_7 25 + \log_7 7 \cdot \log_7 8$. Пусть $t = \log_7 x$, тогда

$$\log_7 5 \cdot t = 2\log_7 5 + \frac{3\log_7 2}{t} \quad (\log_7 5)t^2 - 2(\log_7 5) - 3\log_7 2 = 0, \text{ поскольку}$$

$D > 0$ по теореме Виета можно записать $t_1 + t_2 = 2$, тогда $\log_7 x_1 + \log_7 x_2 = 2$, т.е. $x_1 \cdot x_2 = 49$. **Правильный ответ: 2.**

25	Найдите сумму значений a , при которых решениями неравенства $ 2x + a \leq x + 1 $ является отрезок длины 1. 1 3 2 4 3 -4 4 -0,5 5 -3
-----------	--

$$(2x + a)^2 - (x + 1)^2 \leq 0$$

$$(x + a - 1)(3x + a + 1) \leq 0$$

$$\left|1 - a + \frac{a+1}{3}\right| = 1 \quad \begin{cases} a = 3,5 \\ a = 0,5 \end{cases}.$$

Правильный ответ: 2.

26	Сумма всех коэффициентов многочлена $P(x) = ((1 - \cos \alpha)x - 1)^2 \times ((\sin \alpha - 1)x + 1)^2 - (\sin^2 \alpha \cdot x^2 - 1) \cdot (\cos^2 \alpha \cdot x^2 + 1)$, приведенного к стандартному виду, равна				
	1	2	3	4	5
	$2 \sin^2 \alpha$	$2 \cos^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$	1

Сумма всех коэффициентов многочлена $P(x)$ равна $P(1) = \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - (\sin^2 \alpha - 1)(\cos^2 \alpha + 1) = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 = 2 \cos^2 \alpha$.

Правильный ответ: 2.

27	Решить неравенство $3x + 4 > \sqrt{9 + 4x(x + 3)} + \sqrt{-2x^2 - 8x + 10}$					
1	$\left(-\frac{4}{3}; 1\right]$	2	$\left(\frac{\sqrt{13} - 5}{3}; 1\right]$	3	$\left(-\frac{1}{3}; 1\right]$	
			4	$(-5; 1]$	5	$\left(\frac{2\sqrt{13} - 5}{3}; 1\right]$

$3x + 4 > |2x + 3| + \sqrt{-2x^2 - 8x + 10}$. По смыслу неравенства, в левой части должна стоять неотрицательная величина, т.е. выполняется условие $x > -\frac{4}{3}$, которое позволяет переписать неравенство в виде $\sqrt{-2x^2 - 8x + 10} < x + 1$, решение которого эквивалентно решению системы неравенств $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 0 \leq -2x^2 - 8x + 10 < (x + 1)^2 \end{cases}$.

Правильный ответ: 5.

28	Сумма целых решений неравенства $(x - 5^{\sqrt[3]{\log_5 2}})(2 + x)(2^{\sqrt[3]{\log_2 5}} - x)(x - \pi) \leq 0$ на промежутке $x \in [-4; 6]$ равна				
1	0	2	6	3	9
			4	3	5
					4

Нетрудно догадаться, что $5^{\sqrt[3]{\log_5 2}} = 2^{\sqrt[3]{\log_2 5}}$. В этом легко убедиться, рассмотрев логарифмы этих величин (например, по основанию 5). Обозначив любую из этих величин за a , будем иметь: $(x - a)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - \pi) \geq 0$. Сумма целых решений данного неравенства на отрезке $[-4; 6]$ составит $-4 - 6 - 5 + 4 + 5 + 6 = 6$. **Правильный ответ: 2.**

29	Количество различных корней уравнения $\cos \frac{\pi x}{3} \cdot \sqrt{(x + 4,5)(49 \cos x - \sqrt{99} \sin x - 51)(x - 211,5)} = 0$ равно				
1	74	2	71	3	72
			4	73	5
					∞

Рассмотрим выражение $49 \cos x - \sqrt{99} \sin x - 51 = \sqrt{49^2 + 99} \cdot \sin(x - \varphi) - 51 = 50 \sin(x - \varphi) - 51 < 0$. Поэтому ОДЗ совпадает с отрезком $[-4, 5; 211, 5]$. Серию корней уравнения $\cos \frac{\pi x}{3} = 0$ можно записать $x = \frac{3}{2} + 3n$, для целых n . Интервалу ОДЗ из этой серии принадлежит 71 значение, а также два корня $(-4, 5$ и $211, 5)$, обращающие в ноль второй сомножитель, т.е. исходное уравнение всего имеет 73 корня.

Правильный ответ: 4.

30	Неравенство $x^2 - 3ax + (a - 1)(2a + 1) \leq 0$ выполняется для всех $x \in [3; 5]$ при любых a из множества					
1	$(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$	2	$(-\infty; 3] \cup [6; +\infty)$	3	$[2; 6]$	
			4	$[3; 6]$	5	$[2; 4]$

$(x - (a - 1)) \cdot (x - (2a + 1)) \leq 0$

- Если $a - 1 < 2a + 1$, т.е. $a > -2$, то решением неравенства является отрезок $[a - 1; 2a + 1]$. Чтобы неравенство выполнялось для всех x из промежутка $[3; 5]$, требуем $\begin{cases} a - 1 \leq 3 \\ 2a + 1 \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq a \leq 4$.
- Аналогично рассматривается второй случай $a - 1 > 2a + 1$, который приводит к системе не имеющей решения.
- Случай $a - 1 = 2a + 1$ не удовлетворяет условию задачи, т.к. решением неравенства в данном случае является $x = -3$.

Правильный ответ: 5.