

Разбор заданий очного тура Олимпиады ПРОФИ - 2016

1

Все решения уравнения $\sin 3x + 1 = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ определяются формулой, $(n \in \mathbb{Z})$

1 $\frac{\pi}{3}n$

2 $\frac{\pi}{2}n$

3 $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$

4 $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$

5 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$

Решение.

Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3}n \\ x \neq \frac{\pi}{2}k \end{cases}$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

2

Чему равно значение $f\left(\frac{1}{\log_6 10}\right)$, если $f(x) = 36 \cdot 10^{-2x} + 0,5 \cdot 10^x$

☐ 1

2

☐ 2

5

☒ 3

4

☐ 4

7

☐ 5

39

Решение.

$$f\left(\frac{1}{\log_6 10}\right) = f(\lg 6) = 36 \cdot 10^{-2\lg 6} + \frac{1}{2} \cdot 10^{\lg 6} = \frac{36}{36} + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4$$

Ответ: 4.

3

Вычислить $-\cos 105^\circ \sqrt{\frac{\cos 195^\circ}{\cos 105^\circ}} - \cos 195^\circ \sqrt{\frac{\cos 105^\circ}{\cos 195^\circ}}$

1 1

2 -1

3 -2

4 0

5 2

Решение.

$$\begin{aligned}
 & -\cos 105^\circ \sqrt{\frac{\cos 195^\circ}{\cos 105^\circ}} - \cos 195^\circ \sqrt{\frac{\cos 105^\circ}{\cos 195^\circ}} = \\
 & = \sqrt{\cos 105^\circ \cdot \cos 195^\circ} + \sqrt{\cos 105^\circ \cdot \cos 195^\circ} = \\
 & = 2\sqrt{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sin 30^\circ} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

Ответ: 1

4

Вычислить $\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{38-12\sqrt{10}}+\sqrt{18}}$

1

3

2

$$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{26}$$

3

5

4

$$\frac{4\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{62}$$

5

-5

Решение.

$$\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2(19-6\sqrt{10})}+\sqrt{18}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2(\sqrt{10}-3)^2}+3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{10}-3) + 3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$$

Ответ: 5

5

Произведение $\lg 5 \cdot \log_5 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_9 100$ равно☐ 1 0,5☐ 2 4☐ 3 1☐ 4 2☐ 5 0,25

Решение.

$$\lg 5 \cdot \frac{\lg 2}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 100}{\lg 9} = \lg 5 \cdot \frac{\lg 2}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 3}{2\lg 2} \cdot \frac{2\lg 10}{2\lg 3} = 0,5$$

Ответ: 0,5.

6

Имеются два сплава золота и серебра; в одном из них количество этих металлов находится в отношении $2 : 3$, в другом - в отношении $3 : 7$. Возможно ли из этих сплавов составить новый сплав так, чтобы золото и серебро содержались бы в весовом отношении $5 : 11$? Если это возможно, то в каком отношении надо взять эти сплавы?

1

невозможно

2

 $1 : 2$

3

 $1 : 1$

4

 $1 : 3$

5

 $1 : 7$

Решение.

Пусть масса первого сплава – a , второго – b , тогда количества золота в первом и втором сплавах равно соответственно $\frac{2}{5}a$, $\frac{3}{10}b$. Составим уравнение.

$$\frac{2}{5}a + \frac{3}{10}b = \frac{5}{16}(a + b),$$

$$7a = 1b,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{7}$$

Ответ: $1:7$.

7

Если в арифметической прогрессии $\frac{a_{2015}}{a_{35}} = 61$, то выражение $\frac{a_{126}}{a_{33}}$ равно

☐ 5☐ 6☐ 4☒ 11☐ 3

Решение.

$$a_1 + 2014d = 61 \cdot (a_1 + 34d),$$

$$a_1 = -d,$$

$$\frac{a_{126}}{a_{33}} = \frac{a_1 + 125d}{a_1 + 32d} = \frac{124d}{31d} = 4$$

Ответ: 4.

8

Количество целых решений неравенства $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -0,5$ на промежутке $[0; 2\pi]$ равно

☐ 1 5☐ 2 3☐ 3 6☐ 4 4☐ 5 7

Решение.

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -0,5,$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n$$

С учетом условия задания, что $x \in [0; 2\pi]$, решение неравенства имеет вид:

$$\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$$

Целые числа, удовлетворяющие неравенству: 0; 2; 3; 5; 6

Ответ: 5

9

Все значения параметра a , при которых уравнение $(2x - a) \lg(x + 2) = 0$ имеет только один корень, образуют множество

- 1** $[-4; -2]$ **2** $(-\infty; -2]$ **3** $(-\infty; -4] \cup \{-2\}$ **4** $\{-2\}$ **5** $(-\infty; -4]$

Решение.

Уравнение эквивалентно системе: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2x - a = 0 \\ \lg(x + 2) = 0 \end{cases},$

$$\begin{cases} x > -2 \\ \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ x = -1 \end{cases} \end{cases},$$

Решение будет единственным когда: $\begin{cases} \frac{a}{2} = -1 \\ \frac{a}{2} \leq -2, \end{cases}$

$$a \in (-\infty; -4] \cup \{-2\}$$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup \{-2\}$.

10

Если $\frac{3 \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{\alpha}{2}} = 4$, то угол α оканчивается в четверти

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ однозначно определить невозможно ☐ 5 3

Решение.

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 3}{1 - 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 4, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{14} > 0, \quad \frac{\alpha}{2} \in (\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), \quad \alpha \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \text{ т.е.}$$

I или II четверть.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2/14}{1 - 1/196} > 0$$

Ответ: 1 четверть.

2-й способ.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{14}, \quad 0 < \frac{1}{14} < 1, \quad \frac{\alpha}{2} \in (\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n), \quad \alpha \in (2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \text{ т.е. I четверть.}$$

Ответ: 1 четверть.

- 11 Если боковое ребро правильной треугольной призмы в $\sqrt{3}$ раз больше стороны основания, то угол между стороной основания и не пересекающей ее диагональю боковой грани равен

1 $\frac{\pi}{4}$

2 $\arccos 0,25$

3 $\frac{\pi}{6}$

4 $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$

5 $\frac{\pi}{3}$

Решение.

Пусть $AB = a$, $AA_1 = a\sqrt{3}$, тогда $A_1C = 2a$.

Найдем угол между диагональю боковой грани A_1C и стороной основания AB .

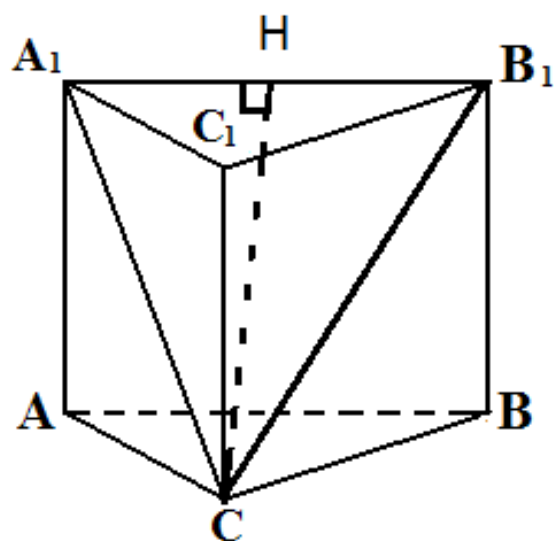
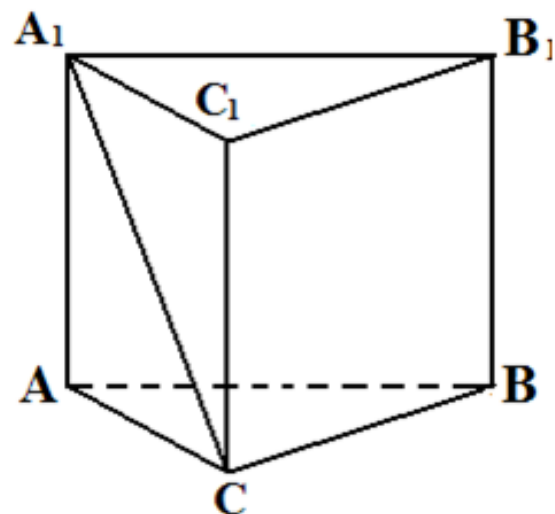
Т.к. эти прямые скрещивающиеся, то искомый угол равен углу CA_1B_1 .

Пусть H – середина A_1B_1 .

Рассмотрим треугольник A_1CH – прямоугольный.

$$\cos (CA_1H) = \frac{a/2}{2a} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\arccos (0,25)$.



12 Все решения уравнения $\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ определяются формулой ($n \in \mathbb{Z}$)

1 $-1 + 10n$ 2 $6 + 10n$ 3 $(-1)^{n+1} + 10n$ 4 $(-1)^{n+1} + 5n$ 5 $\pm 1 + 10n$

Решение.

Т.к. $y = \sin x$ — функция нечетная, то уравнение примет вид:

$\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$, и $-\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то решение запишем в виде

$$\frac{\pi x}{5} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{5} + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1} + 5n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} + 5n$.

13 Предприниматель получил кредит в организации под определенный процент. Через год в счет погашения кредита он внес в организацию 75 % от всего долга организации к этому времени. Еще через год для полного погашения долга он внес сумму в размере 31,36 % от величины полученного кредита. Чему равен годовой процент по кредиту в этой организации?

- 1** 12 **2** 36 **3** 25 **4** 15 **5** 18

Решение.

Пусть V – сумма кредита, x – процентная ставка организации, тогда условие задачи запишется так

$$V \cdot \left(\frac{100 + x}{100} \right) \left(\frac{100 - 75}{100} \right) \left(\frac{100 + x}{100} \right) - V \cdot \frac{31,36}{100} = 0$$

$$\left(\frac{100 + x}{100} \right)^2 = \frac{31,36}{25},$$

$$\frac{100 + x}{100} = \frac{5,6}{5},$$

$$x = 12$$

Ответ: 12

14 Если боковые стороны треугольника равны 3 см и 4 см, а медиана, проведенная к основанию, равна $0,5\sqrt{34}$ см, то это основание составляет

1 4 см

2 3,5 см

3 5 см

4 3 см

5 6 см

Решение.

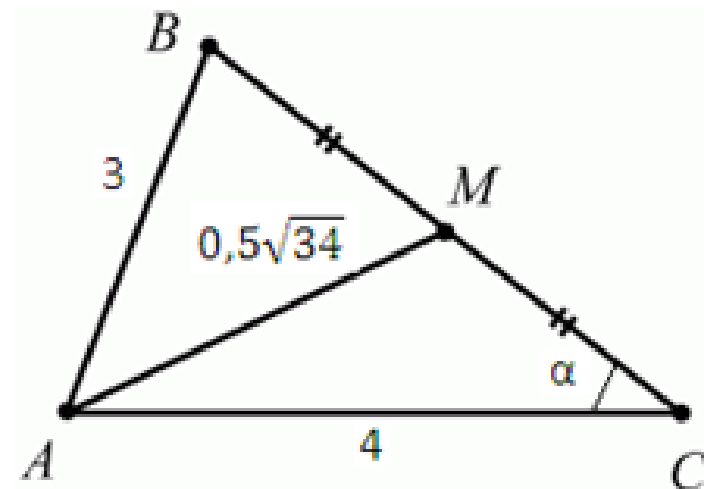
В треугольнике ABC, применим теорему косинусов для стороны AB и медианы AM.

Пусть $BC = 2x$

$$\begin{cases} 3^2 = 4x^2 + 16 - 16x\cos\alpha \\ \frac{34}{4} = x^2 + 16 - 8x\cos\alpha \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $x = 2$.

Ответ: 4.



15 Сумма целых решений неравенства $|\sqrt{7x-2}-5|+|\sqrt{7x-2}-7|\leq 12$ равна

1 27

2 28

3 21

4 33

5 210

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{7x-2}-6=t$, тогда неравенство примет вид

$$|t+1|+|t-1|\leq 12.$$

Решим неравенство
графически.

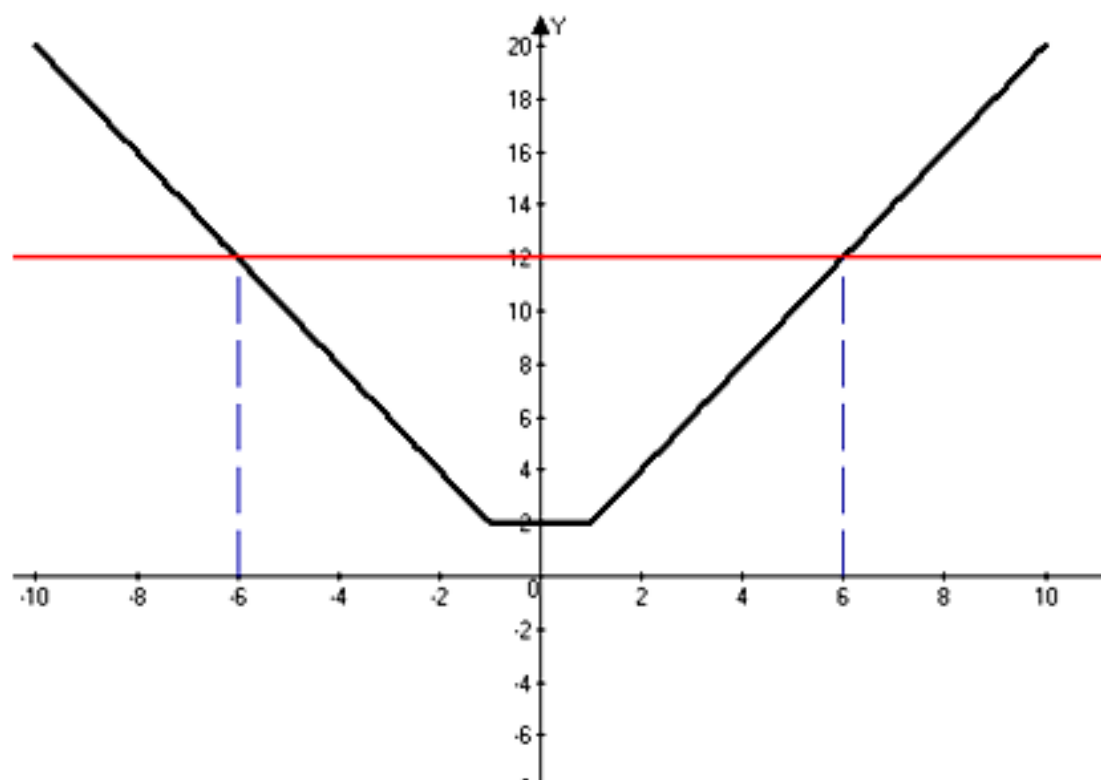
$$-6\leq t\leq 6$$

$$-6\leq \sqrt{7x-2}-6\leq 6$$

$$0\leq \sqrt{7x-2}\leq 12$$

$$0\leq 7x-2\leq 144$$

$$\frac{2}{7}\leq x\leq 20\frac{6}{7}$$



Сумма целых решений неравенства равна $\frac{1+20}{2} \cdot 20 = 210$

Ответ: 210

- 16** Если для любого x выполняется соотношение $f(2x+1) = 4x^2+1$, то разность между наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ при $x \in [0; 2]$ равна
- ☐ 1 5 ☐ 2 0 ☐ 3 4 ☐ 4 1 ☐ 5 3

Решение.

Пусть $2x + 1 = t$, $x = \frac{t-1}{2}$, $f(t) = 4 \cdot \frac{(t-1)^2}{4} + 1$, $f(t) = (t-1)^2 + 1$.

Найдем наименьшее и наибольшее значение функции $f(x) = (x-1)^2 + 1$ при $x \in [0; 2]$.

Нетрудно заметить, что наименьшее значение равно $f(1) = 1$,

Наибольшее значения на указанном промежутке $f(0) = f(2) = 2$

$$2 - 1 = 1$$

Ответ: 1.

17 Сумма $\arcsin\left(\cos\frac{9}{8}\pi\right) + \arccos\left(\sin\frac{9}{8}\pi\right)$ равна

1 $\frac{\pi}{4}$

2 $\frac{5\pi}{4}$

3 $\frac{3\pi}{4}$

4 $-\frac{\pi}{4}$

5 0

Решение.

Воспользуемся формулами приведения и свойствами обратных тригонометрических функций.

$$\begin{aligned}\arcsin\left(\cos\frac{9}{8}\pi\right) + \arccos\left(\sin\frac{9}{8}\pi\right) &= \arcsin\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right) + \arccos\left(-\sin\frac{\pi}{8}\right) = \\ &= -\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) + \pi - \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} + \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

18

Сумма корней уравнения $16^x - (\lg^2 5 + \lg^2 2) \cdot 4^x = 4^{x+3} - 16$ равна

1

3

2

корней нет

3

2

4

 $65 - \lg 2 \cdot \lg 5$

5

4

Решение.

Перенесем все в левую часть и приведем подобные.

$$4^{2x} - (\lg^2 5 + \lg^2 2 + 64)4^x + 16 = 0$$

Сделаем замену $4^x = t, t > 0$, тогда уравнение примет вид

$$t^2 - (\lg^2 5 + \lg^2 2 + 64)t + 16 = 0$$

Т.к. $D > 0$, то по теореме Виета $\begin{cases} t_1 + t_2 = \lg^2 5 + \lg^2 2 + 64 \\ t_1 \cdot t_2 = 16, \end{cases}$

Сделаем обратную замену. $4^{x_1} \cdot 4^{x_2} = 16, \quad x_1 + x_2 = 2$

Ответ: 2.

- 19 Два проходческих комбайна начали рыть навстречу друг другу тоннель длиной 30 м. Стоимость проходки первого метра первым комбайном равна 15 тыс. р., а стоимость каждого последующего метра его проходки на 9 тыс. р. больше предыдущего. Стоимость проходки каждого метра вторым комбайном равна 127,5 тыс. р. Минимальная стоимость (в тыс. р.) проходки всего тоннеля равна
- 1 1715 2 2399 3 1515 4 2301 5 3064,5

Решение.

Пусть n метров пройдет 1-й комбайн, тогда $(30 - n)$ метров 2-й комбайн.

Стоимость работы первого комбайна представляет арифметическую прогрессию, тогда можно посчитать её сумму $S_1 = \frac{2 \cdot 15 + 9 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$

Стоимость работ второго комбайна $S_2 = (30 - n) \cdot 127,5$

Значит, стоимость всего тоннеля равна $S = \frac{2 \cdot 15 + 9 \cdot (n-1)}{2} \cdot n + (30 - n) \cdot 127,5$

$S = 4,5n^2 - 117n + 3825$. Наименьшее значение функция принимает при $n = \frac{117}{2 \cdot 4,5} = 13$

Минимальная стоимость проходки тоннеля равна

$$s = 4,5 \cdot 13^2 - 117 \cdot 13 + 3825 = 3064,5$$

Ответ: 3064,5.

20

Сумма корней уравнения $\log_{\sin \pi x} \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi x \right) = 2$ из промежутка $(-2; 3)$ равна

☐ 1 2,5 ☐ 2 на данном промежутке корней нет ☐ 3 1 ☐ 4 0,5 ☐ 5 3

Решение.

Уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} \sin(\pi x) > 0 \\ \sin(\pi x) \neq 1 \\ 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi x) = (\sin(\pi x))^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) > 0 \\ \sin(\pi x) \neq 1 \\ \cos^2(\pi x) = \frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} \sin(\pi x) > 0 \\ \sin(\pi x) \neq 1 \\ \cos(\pi x) = \pm \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \pi x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + 2n \\ x = \frac{2}{3} + 2k, \quad n, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Найдем корни, принадлежащие интервалу $(-2; 3)$:

$$\left(\frac{1}{3} - 2\right), \quad \frac{1}{3}, \quad \left(\frac{1}{3} + 2\right), \quad \left(\frac{2}{3} - 2\right), \quad \frac{2}{3}, \quad \left(\frac{2}{3} + 2\right)$$

Сумма корней уравнения равна 3.

Ответ: 3

21

Решением уравнения $(-4x - x^2 - 3) \cdot \log_2(\sin^2(\frac{5\pi}{4}x) + 1) = 1$ является число из промежутка

1 $[-3, 5; -3)$ **2** $[-1, 5; 1)$ **3** $[-4; -3, 5)$ **4** $[1; 2)$ **5** $[-3; -1, 5)$

Решение.

Запишем уравнение в виде: $\log_2\left(\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}x\right) + 1\right) = -\frac{1}{(x+2)^2-1}$

Несложно оценить значения правой и левой частей уравнения.

$$y = \log_2\left(\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}x\right) + 1\right), y \in [0; 1]$$

$$y = -\frac{1}{(x+2)^2-1}, y \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty), \text{ тогда получим систему}$$

$$\begin{cases} \log_2\left(\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}x\right) + 1\right) = 1 \\ -\frac{1}{(x+2)^2-1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2\left(\frac{5\pi}{4}x\right) = 1, \\ x = -2 \end{cases}$$

Ответ: $[-3; -1,5)$.

22 Наибольшее значение величины $x + y$ при условии $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$ равно

1 2

2 5

3 3

4 4

5 1

Решение.

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$$

Пусть $a = x + y$, $y = -x + a$

Воспользуемся известной формулой
расстояния от точки до прямой.

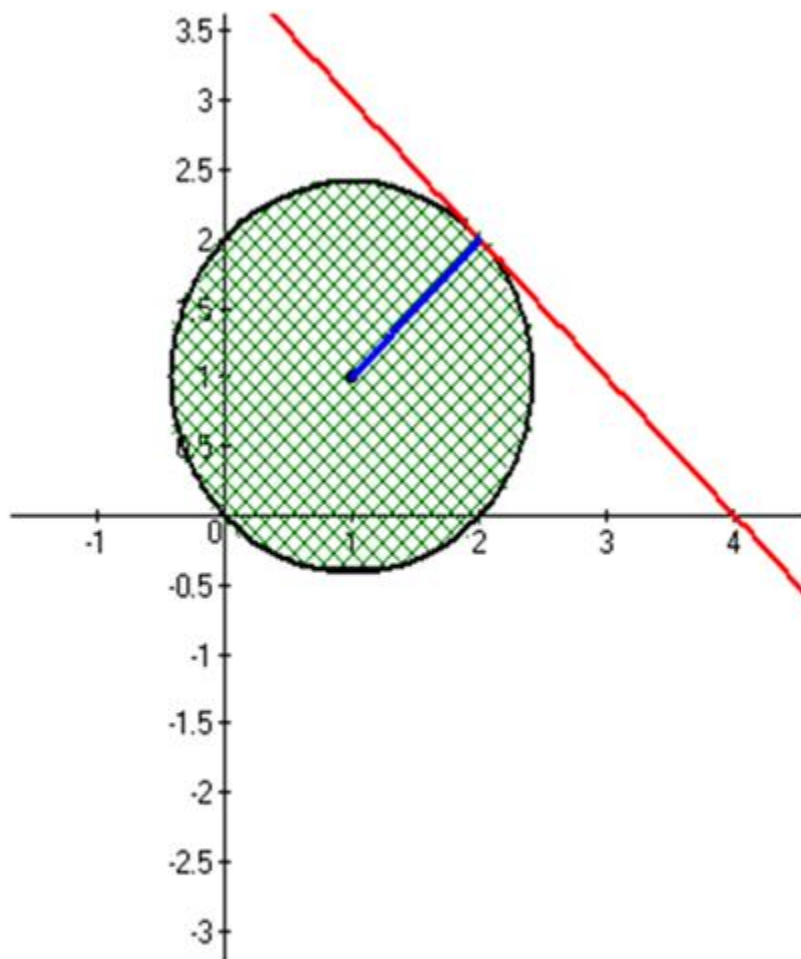
$$(x_0; y_0) \quad Ax + By + C = 0,$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$x + y - a = 0, \quad (1; 1), \quad d = R = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{|1 + 1 - a|}{\sqrt{2}}, \quad a = 0, \quad a = 4$$

Ответ: 4



23

Уравнение $e^x = ax^2$ имеет три решения при всех $a > 0$ из промежутка

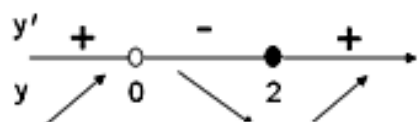
- ☐ 1 $(0, 25e^2; +\infty)$
☐ 2 $(0; 3]$
☐ 3 $(0; 2, 25)$
☐ 4 $(0; 0, 25e^2)$
☐ 5 $(4e^{-2}; +\infty)$

Решение.

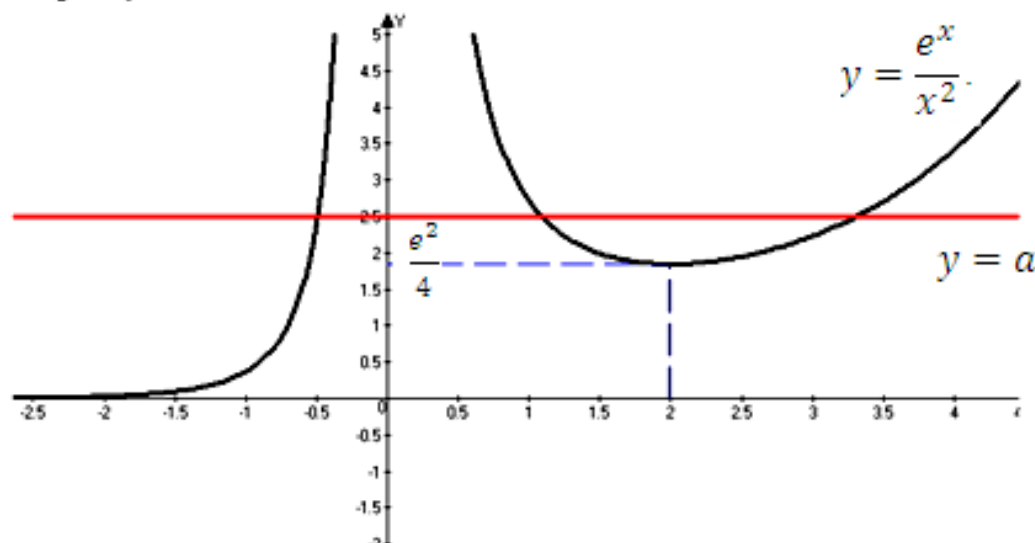
$$a = \frac{e^x}{x^2} \quad \begin{cases} y = a \\ y = \frac{e^x}{x^2} \end{cases}$$

Исследуем функцию с помощью производной и построим её график $y = \frac{e^x}{x^2}$.

$$y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$



$$y(2) = \frac{e^2}{4}$$



$$a \in \left(\frac{e^2}{4}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(\frac{e^2}{4}; +\infty\right).$

24 Магазин закупил партию свежего инжира на 125 тыс. р. В конце каждой недели из четырех, что партия хранилась на складе, приходилось выбрасывать испорченные фрукты в количестве, составляющем один и тот же процент от объема, имеющегося на этот момент. Каков этот процент, если после указанного срока фруктов осталось на 51,2 тыс. р.?

1 20

2 62,5

3 40

4 25

5 45

Решение.

Пусть x — процент испорченных продуктов, $0 < x < 100$, тогда условие задачи запишем в виде уравнения:

$$125 \cdot \left(\frac{100 - x}{100} \right)^4 = 51,2$$

$$\left(\frac{100 - x}{100} \right)^4 = \frac{512}{1250}$$

$$\left(\frac{100 - x}{100} \right)^4 = \frac{256}{625}$$

$$\text{Т.к. } 0 < x < 100, \text{ то } \frac{100 - x}{100} = \frac{4}{5}$$

$$x = 20$$

Ответ: 20.

25	Указать сумму всех целых $a \in (-2; 5)$, при которых неравенство $4^x + 2(1 - 2a) \cdot 2^x + 4a^2 - 3 > 0$ выполняется для любых x .				
	1 10	2 9	3 8	4 -1	5 3

Решение.

Сделаем замену $2^x = t, t > 0$, тогда задание сформулируем так: неравенство $t^2 + 2(1 - 2a)t + 4a^2 - 3 > 0$ выполняется при всех положительных t .

- 1) Если $D < 0$ (т.к. ветви параболы направлены вверх), $\frac{D}{4} = -4a + 4, a > 1$.
- 2) Проверим случай, когда $D = 0, a = 1$. $(t - 1)^2 > 0$ выполняется не при все положительных t ($t = 1$ не является решением)
- 3) Если $D > 0$, т.е. $a < 1$, то
$$\begin{cases} \frac{-2(1-2a)}{2} < 0 \\ 4a^2 - 3 \geq 0, \end{cases} a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup (1; +\infty).$$

Т.к. по условию $a \in (-2; 5)$, то целые значения параметра: $-1, 2, 3, 4$

Ответ: 8.

26	При каком из приведенных значений параметра a , сумма целочисленных решений неравенства $\frac{ x-7 }{x-7} + \sqrt{a^2 - (x-1)^2} \geq 0$ равна 17?								
1	9	2	5	3	7	4	6	5	8

Решение. $\sqrt{a^2 - (x-1)^2} \geq -\frac{|x-7|}{x-7}$

Рассмотрим функции $y = \sqrt{a^2 - (x-1)^2}$ и $y = -\frac{|x-7|}{x-7}$.

$$y = \begin{cases} -1, & x > 7 \\ 1, & x < 7 \end{cases},$$

$\begin{cases} y \geq 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ — при $a \neq 0$ это верхняя полуокружность с центром $(1; 0)$ и радиусом $|a|$.

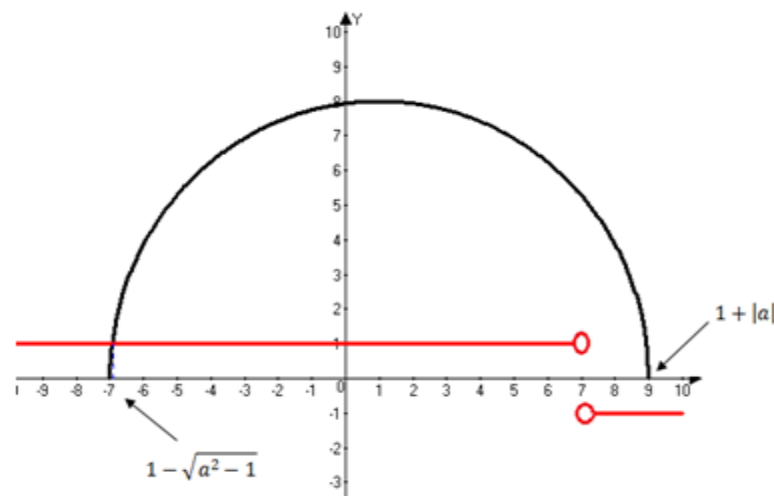
Найдем точки пересечения полуокружности с прямой $y = 1$

$$\sqrt{a^2 - (x-1)^2} = 1,$$

$$x = 1 \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Очевидно, чтобы выполнялось условие задания радиус $|a| > 7$, тогда решение нашего неравенства имеет вид:

$$x \in [1 - \sqrt{a^2 - 1}; 7) \cup (7; 1 + |a|].$$



Осталось подставить два значения 8 и 9, и проверить выполнение условия задания.

Если $a = 9$, то $x \in [1 - \sqrt{80}; 7) \cup (7; 10]$. Целыми решениями являются числа : $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$. Сумма целых решений равна 20.

Если $a = 8$, то $x \in [1 - \sqrt{63}; 7) \cup (7; 9]$. Целыми решениями являются числа : $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$. Сумма целых решений равна 17.

Ответ: 8.

27

Решением неравенства $2|x-1-a| \leq -x^2+2(a+1)x-2a-2$ является отрезок длины 6, если a равняется

1

 ± 3

2

 ± 4

3

 ± 1

4

 ± 5

5

 ± 2

Решение.

Воспользуемся методом группировки и формулой сокращенного умножения.

$$x^2 - 2(a+1)x + 2|x - (a+1)| + 2a + 2 \leq 0$$

$$x^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2 - (a+1)^2 + 2|x - (a+1)| + 2a + 2 \leq 0$$

$$(x - (a+1))^2 + 2|x - (a+1)| + 1 - a^2 \leq 0$$

$$(|x - (a+1)| + 1)^2 \leq a^2$$

$$|x - (a+1)| + 1 \leq |a|$$

$$|x - (a+1)| \leq |a| - 1$$

Длина отрезка, который является решением неравенства, равна

$$2(|a| - 1) = 6$$

$$|a| = 4$$

Ответ: ± 4 .

28	Сумма всех целых значений параметра a , при которых уравнение $x^4 - 2x^3 + (2a - 16)x^2 + (8 - 2a)x + a^2 - 8a + 16 = 0$ имеет ровно два действительных различных корня, равна				
1	15	2	13	3	4
4	-13	5	-15		

Решение.

Решим уравнение относительно a .

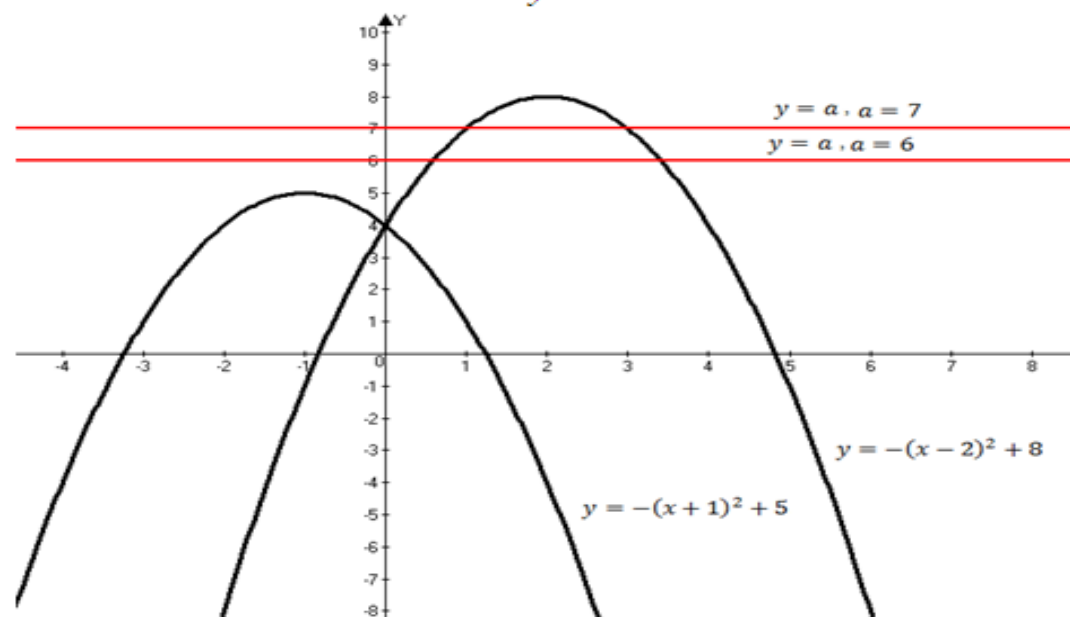
$$a^2 + (2x^2 - 2x - 8)a + x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 8x + 16 = 0.$$

$$D = (2x^2 - 2x - 8)^2 - 4(x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 8x + 16) = 36x^2$$

$$\begin{cases} a = -(x+1)^2 + 5 \\ a = -(x-2)^2 + 8 \end{cases}$$

Построим графики функций $y = -(x+1)^2 + 5$, $y = -(x-2)^2 + 8$, $y = a$ и ответим на

вопрос, когда система $\begin{cases} y = -(x+1)^2 + 5, \\ y = -(x-2)^2 + 8, \\ y = a \end{cases}$ имеет равно два различных решения.



$$a = 6, a = 7$$

Ответ: 13.

- 29 В каком из приведенных промежутков может располагаться величина $x+y$, если $\log_2 \left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \right) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$?
- 1 (9; 10) 2 (6; 7) 3 (12; 14) 4 (1; 2) 5 (8; 9)

Решение.

$$\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \geq 2, \quad \log_2 \left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \right) \geq 1$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{(x - 1)^2 + 1} \leq 1$$

$$\begin{cases} \log_2 \left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \right) = 1 \\ \frac{1}{(x - 1)^2 + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \cos^2(xy) = 1 \end{cases}, \quad x + y = 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: (12; 14)

30

Найдите сумму всех целых значений a , для которых неравенство $(a - x^2)(a - x - 6) \leq 0$ выполняется для любых $x \in [-1; 2]$

1

11

2

 ∞

3

17

4

9

5

15

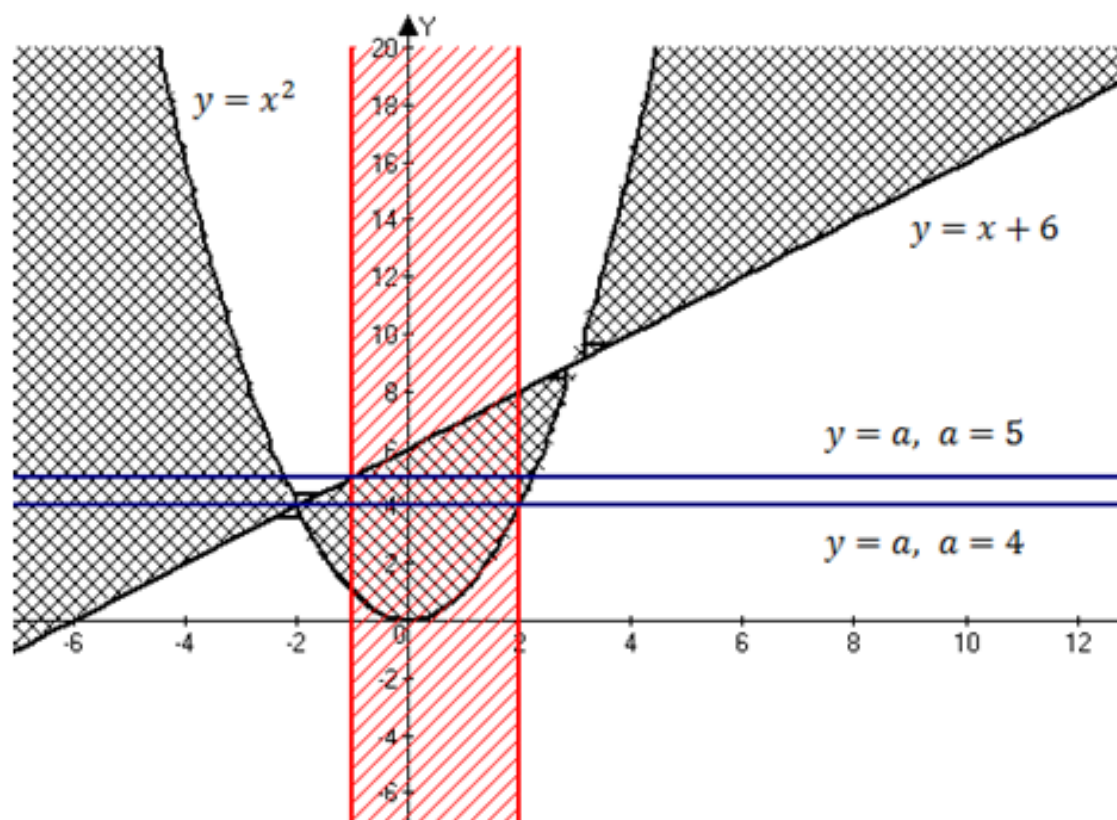
Решение.

Решим неравенство на координатной плоскости, для этого построим линии:

$y - x^2 = 0$ и $y - x - 6 = 0$ и определим области удовлетворяющие неравенству.

Сумма целых
значений параметра a
равна $4+5=9$.

Ответ: 9



Иванов Анатолий Прокопьевич

Профессор, Заведующий кафедрой Высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ
Ординарный профессор



Морозова Алена Витальевна

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ



Морозов Евгений Анатольевич

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ



Новоселов Антон Вячеславович

Специалист по учебно-методической работе Факультета довузовской подготовки
НИУ ВШЭ в ПЕРМИ



Поздрав за участие в олимпиаде профн 2016